

INESGOTÁVEL TRIÂNGULO

Rosana de Andrade Araújo Pinto

INESGOTÁVEL TRIÂNGULO

Rosana de Andrade Araújo Pinto

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE BRASÍLIA
EDITORA IFB

REITORA

Veruska Ribeiro Machado

PRÓ-REITORA DE ENSINO

Rosa Amélia Pereira da Silva

PRÓ-REITORA DE EXTENSÃO E CULTURA

Diene Ellen Tavares Silva

PRÓ-REITORA DE PESQUISA E INOVAÇÃO

Simone Braz Ferreira Gontijo

PRÓ-REITORA DE ADMINISTRAÇÃO

Cláudia Sabino Fernandes

PRÓ-REITOR DE GESTÃO DE PESSOAS

José Anderson de Freitas Silva

CONSELHO EXECUTIVO

Augusta Rodrigues de Oliveira Zana

Bruno Oliveira Tardin

Daniel Cerqueira Costa

Debora Kono Taketa Moreira

Demétrius Alves de França

Érika Barretto Fernandes Cruvinel

Gervásio Barbosa Soares Neto

Iva Fernandes da Silva Medeiros de Jesus

Jocênio Marquios Epaminondas

Lara Batista Botelho

Leonardo Moreira Leódido

Lucilene Alves Vitória dos Santos

Maria Antônia Germano dos Santos Maia

Mariela do Nascimento Carvalho

Maurílio Tiradentes Dutra

Nicolau de Oliveira Araujo

Ricardo Faustino Teles

Rute Nogueira de Moraes Bicalho

Rômulo Ramos Nobre Júnior

Sônia Carvalho Leme Moura Veras

Sylvana Karla da Silva de Lemos Santos

Venâncio Francisco de Souza Júnior

COORDENAÇÃO DE PUBLICAÇÕES

Daniele dos Santos Rosa

PRODUÇÃO EXECUTIVA

Jefferson Sampaio de Moura

DIAGRAMAÇÃO E CAPA

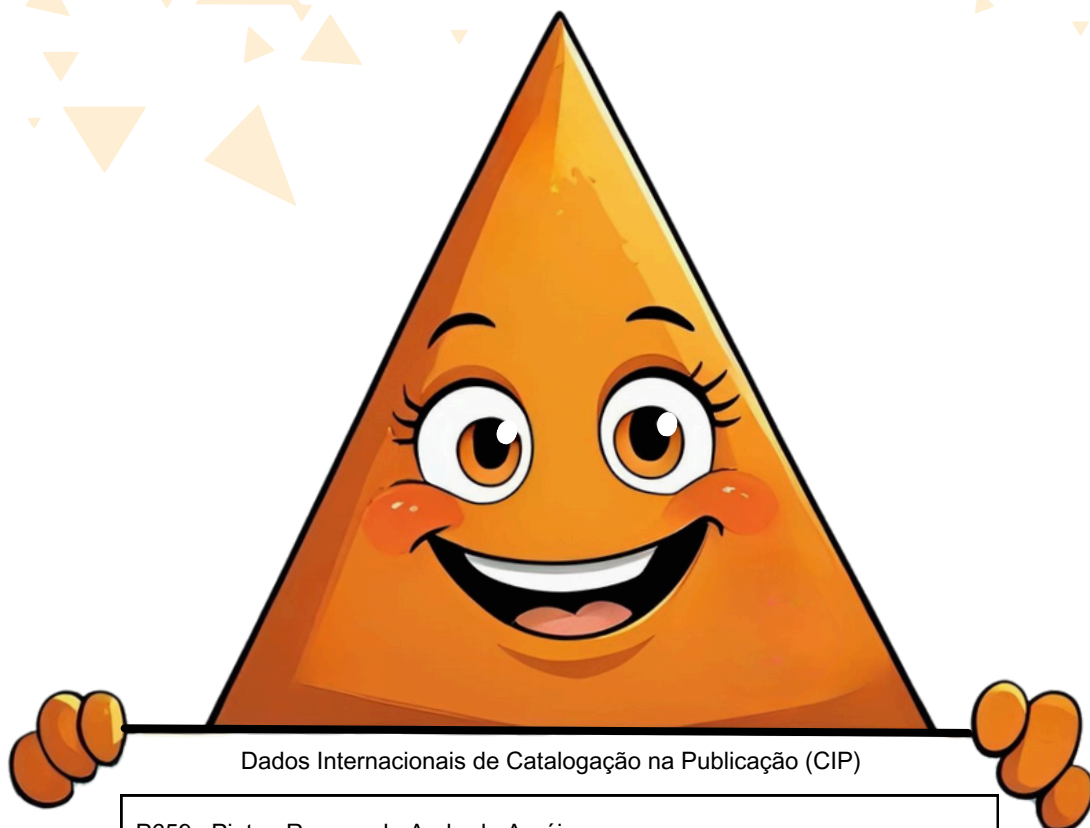
Núbia Christiane Sampaio Teixeira

REVISÃO TEXTUAL

Certifique-se Soluções Acadêmicas LTDA

ILUSTRAÇÃO

Núbia Christiane Sampaio Teixeira



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P659 Pinto, Rosana de Andrade Araújo

Inesgotável triângulo [recurso eletrônico] / Rosana de Andrade Araújo Pinto. — Brasília : Editora IFB, 2025.

1 E-book : 86 p. : il. ; PDF.

Edição digital.

ISBN 978-65-6074-045-7

1 Triângulo. 2. Geometria analítica. 3. Coordenadas trilineares. I. Título.

CDU 514.12

Elaborado pela bibliotecária Mariela do Nascimento Carvalho - CRB1/2184

2025 - Editora IFB

Obra produzida com apoio do Edital n. 12/2024 - PRPI/RIFB/IFBRASILIA, DE 24 DE JUNHO DE 2024 - Apoio a Publicações de Livretos - 2024

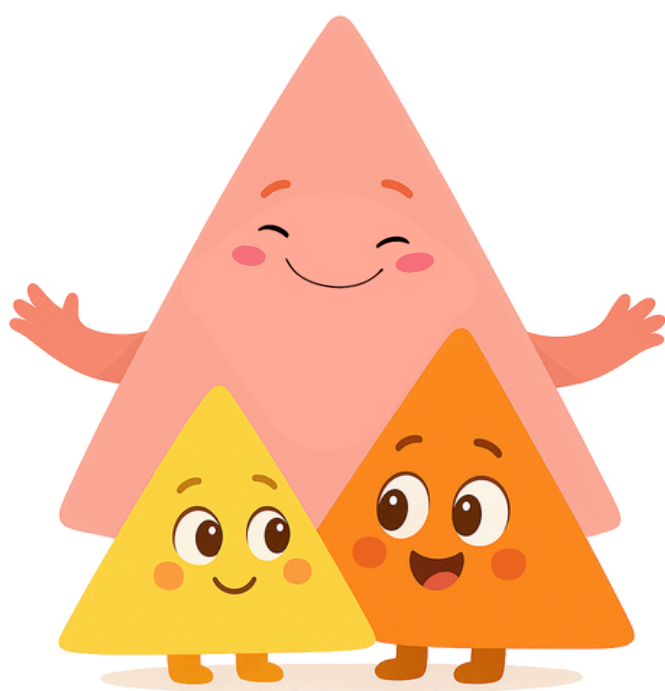


A exatidão das informações, as opiniões e os conceitos emitidos na obra são de exclusiva responsabilidade dos autores. Todos os direitos desta publicação são reservados à Editora IFB. É permitida a publicação parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte. É proibida a venda desta publicação.



REITORIA - Setor de Autarquias Sul
Qd 2, Bloco E - Edifício Siderbrás
CEP 70.070-020 | Asa Sul - Brasília/DF
www.ifb.edu.br
+55 (61) 2103-2110
editora@ifb.edu.br

Aos meus amores incondicionais,
Júlia e Joana.



*Sou o caçula de uma grande família
Tenho alguns parentes,
Núcleos familiares evidentes
Escaleno, isósceles, equilátero são da família do tio Lado
Retângulo, acutângulo, obtusângulo são da família do tio Ângulo
Somos tão parecidos
Que podemos ser confundidos*

*Sou o mais versátil da família
Tenho algumas aglutinações
Núcleos familiares combinações
Equilátero também é acutângulo
Isósceles pode ser retângulo
Escaleno pode ser obtusângulo
Somos tão parecidos
Que podemos ser confundidos*

*Posso dizer que tenho várias personas
Tenho algumas bem instituídas
Núcleo familiares conhecidas
Bissetrizes, alturas, medianas
Todas cevianas
Somos tão parecidos
Que podemos ser confundidos*

*Mas deixe me apresentar,
Sou da família Polígonos
Me chamo Triângulo
Inesgotável para explorar*

Rosana de Andrade



SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO - 09

CAPÍTULO 1 - Triângulos - 08

- 1.1 – Elementos dos triângulos - 09
- 1.2 – Classificação e propriedades do triângulo - 11

CAPÍTULO 2 - Triângulos Especiais - 17

- 2.1 – Triângulo médio - 18
- 2.2 – Triângulo anticomplementar - 18
- 2.3 – Triângulo órtico - 19
- 2.4 – Triângulo tangencial - 19
- 2.5 – Triângulo excentral ou tritangencial - 20
- 2.6 – Triângulo pedal - 20
- 2.7 – Triângulo antipedal - 21
- 2.8 – Triângulo copolar - 21
- 2.9 – Triângulo coaxial - 22

CAPÍTULO 3 - Transformações no plano - 23

- 3.1 – Isometria no plano - 24
- 3.2 – Homotetia - 27
- 3.3 – Semelhança - 28
- 3.4 – Semelhança de triângulos - 28
- 3.5 – Inversão - 30

CAPÍTULO 4 - Teoremas Clássicos - 33

- 4.1 – Teorema de Menelaus - 34
- 4.2 – Teorema de Cevas - 37
- 4.3 – Dualidade dos teoremas de Menelaus e Ceva - 39
- 4.4 – Teorema dos dois triângulos de Desargues - 42
- 4.5 – Teorema de Pappus - 44
- 4.6 – Teorema de Pascal - 47

CAPÍTULO 5: Elementos de destaque do triângulo - 49

- 5.1 – Incentro - 50
- 5.2 – Circuncentro - 51
- 5.3 – Baricentro - 52
- 5.4 – Ortocentro - 53
- 5.5 – Reta de Euler - 54
- 5.6 – Ponto de Euler e triângulo de Euler - 56
- 5.7 – Pontos de Feuerbach - 60
- 5.8 – Ponto de Gergonne - 65
- 5.9 – Ponto de Nagel - 67
- 5.10 – Reta de Simson - 69

CAPÍTULO 6: Coordenadas Trilineares - 71

- 6.1 – Incentro - 73
- 6.2 – Baricentro - 74
- 6.3 – Circuncentro - 75
- 6.4 – Ortocentro - 76
- 6.5 – Centro do círculo de nove pontos - 76
- 6.6 – Ponto de Lemoine - 77
- 6.7 – Ponto de Gergonne - 78
- 6.8 – Ponto de Nagel - 78
- 6.9 – Ponto de Mittenpunkt - 78
- 6.10 – Ponto de Spieker - 79
- 6.11 – Ponto de Feuerbach - 80
- 6.12 – Ponto de Longchamps - 80
- 6.13 – Ponto de Schiffler - 80

Referências - 82

ΔPRESENTΔÇÃO

Triângulo. Desde criança se ouve falar nesta figura geométrica. Ela está presente na vida de todos antes mesmo de se iniciar o processo escolar, sejam nos brinquedos, jogos que envolvem formas geométricas, ou nas atividades artísticas e artesanais. Mas o que não se sabe quando criança ou até mesmo depois de uma boa caminhada acadêmica, é que uma figura aparentemente tão simples possa ser uma das mais ricas dentre as formas geométricas estudadas até hoje.

Permita-se conhecer melhor o triângulo, seus elementos e os vários pontos de destaque associados a ele. Este livro reúne uma coletânea de elementos, propriedades e mais de quinze pontos que irão encantar jovens e adultos no mundo da geometria. Para satisfazer a mente e os olhos foram incluídos vários gráficos, que são verdadeiras obras de arte geométricas.

Partindo do pressuposto das noções básicas da geometria, os dois primeiros capítulos expressam a geometria do triângulo propriamente dita, reunindo o essencial, com as definições de seus elementos, propriedades, algumas classificações e tipos de triângulos, evitando com isso confronto entre tais conceitos.

O nosso protagonista exala assuntos para serem trabalhados, no entanto se fez necessário uma seleção rigorosa dos principais estudos, assim destinou-se um único e breve momento sobre transformações no plano, bem como alguns dos principais resultados e teoremas, que serviram de suporte para demonstrações ao longo da obra. Eles não serão demonstrados, apenas definidos e enunciados para uma posterior aplicação nos resultados subsequentes da geometria do triângulo.

Não poderia ficar de fora grandes teoremas clássicos da geometria, todos os aqui discutidos são associados ao triângulo, com exceção do teorema de Pascal. Você pode enxergar com estranheza, mas apesar deste teorema não partir de um triângulo e de ser chamado de “teorema do hexágono místico”, foi incluído por ser um dos grandes teoremas da matemática e por se relacionar a alguns elementos de destaque do triângulo.

Toda a retórica construída nos primeiros capítulos se estabeleceu como alicerce, verdadeiros sustentáculos matemáticos para que os dois últimos capítulos pudessem ser desenvolvidos com o rigor e a clareza necessária para o entendimento por diversos públicos. Uma coletânea de mais de quinze pontos de destaque do triângulo, a jornada começa por destacar os pontos elementares e mais populares: baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro, e gradativamente flui por outros pouco conhecidos e que podem ser explorados a partir das coordenadas trilineares, que surge como um grande avanço da geometria em direção à algebrização, um mundo ainda pouco explorado na educação matemática.

Desde os tempos antigos, os triângulos têm desafiado mentes criativas e, inquisitivas sua diversidade e suas propriedades matemáticas e simbólicas garantem que o triângulo continue a ser uma fonte de interesse e aprendizado inesgotável em várias disciplinas e contextos, tanto na geometria quanto em muitos outros aspectos da vida humana e do conhecimento.

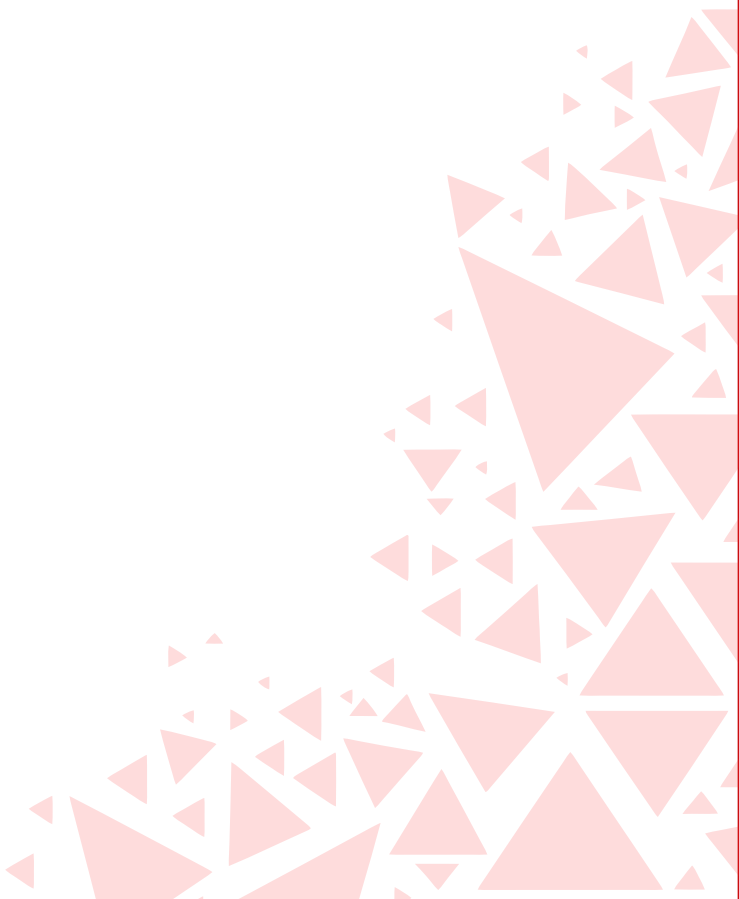
$\triangle$ precie.





ΚΑΠÍTULO 1

TRIΔNGULOS



O triângulo é uma das figuras geométricas mais populares, que transcende culturas, épocas e disciplinas acadêmicas. Com seus três lados, três vértices e uma variedade infinita de configurações possíveis, o triângulo é muito mais do que uma simples forma geométrica; é um símbolo de equilíbrio, estabilidade e simplicidade na complexidade matemática e na arte visual. Esta figura simples não só permeia os campos da matemática, mas também inspira pensadores a explorar as profundezas da sua versatilidade.



Definição: Um **triângulo** é formado por três pontos que não pertencem à mesma reta e pelos três segmentos lineares determinados por estes três pontos.

Para que possamos explorar esta fonte em sua total amplitude vamos relembrar alguns elementos, conceitos e propriedades que o compõem.

1.1 – Elementos dos triângulos

Os três pontos não colineares são chamados de **vértices** do triângulo e os segmentos são os lados do triângulo.

Lados adjacentes de um triângulo são lados com um vértice em comum, vértices adjacentes são os extremos do mesmo lado.

A todo par de pontos A, B do plano corresponde um número maior ou igual a zero, que é a distância entre os pontos, essa distância é o **comprimento do segmento** AB e usaremos o símbolo $\overline{AB}$. Assim, se a e b são as coordenadas das extremidades desse segmento, o seu comprimento é $\overline{AB} = |b - a| = |a - b|$.

Ângulo interno de um triângulo é o menor ângulo determinado por dois lados adjacentes desse triângulo.

Ângulo externo de um triângulo é o ângulo determinado por um lado e pela semirreta oposta ao lado adjacente.

Ângulos suplementares são ângulos tais que a soma de suas medidas é igual a 180° .

Altura de um triângulo é o segmento perpendicular que une um vértice do triângulo à reta pelo lado oposto.

Ponto médio de um segmento AB é um ponto C deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$

Base média de um triângulo é o segmento que une os pontos médios dos lados de um triângulo.

Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

Mediatriz de um segmento AB é uma reta perpendicular ao segmento AB traçada pelo seu ponto médio.

Bissetriz de um ângulo $\hat{BAC}$ é a semirreta AD que está entre AB e AC , e tal que divide o ângulo em dois ângulos congruentes, portanto segue que $\hat{BAD} = \hat{DAC}$.

Bissetriz de um triângulo é o segmento da bissetriz de um ângulo interno do triângulo que une o vértice desse ângulo ao lado oposto.

Ceviana é todo segmento que une um vértice de um triângulo a qualquer ponto da reta pelo lado oposto.

Em particular, as alturas e as medianas de um triângulo são cevianas.

Duas ou mais retas (ou segmentos) são concorrentes em um ponto se todas elas(eles) passam pelo ponto.

► **Teorema 1.1** – O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

Área do triângulo ABC é a média dos comprimentos da base e da altura do triângulo, assim no $\triangle ABC$ com comprimento da base $\overline{AB} = b$ e altura medindo $h = \overline{CD}$ tem área dada por área $\triangle ABC = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2}$.

Proposição 1.1 – Fórmula de Heron

A área do triângulo ABC com lados de comprimento $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ e semi-perímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$ é dada por área $(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Proposição 1.2 – A área de um triângulo ABC com lados medindo $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ e onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC é dada por área $(\Delta ABC) = \frac{a.b.c}{4R}$.

1.2 – Classificação e propriedades do triângulo

Classificaremos os triângulos aqui quanto aos lados e quanto aos ângulos, mais existem além desses outros tipos de triângulos que veremos no capítulo 2.

Os triângulos são classificados de duas formas:

1 – Quanto aos lados:

- Triângulo eqüilátero: os três lados são congruentes
- Triângulo isósceles: dois dos lados são congruentes
- Triângulo escaleno: quando os três lados são diferentes

2 – Quanto aos ângulos:

- Triângulo retângulo: possui um ângulo reto
- Triângulo obtusângulo: possui um ângulo maior que um ângulo reto
- Triângulo acutângulo: possui os três ângulos menores que um ângulo reto.

No caso do triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa e os outros dois lados são chamados catetos.

Propriedades do triângulo

O triângulo isósceles é um triângulo que traz consigo algumas propriedades básicas bastante relevantes, como segue:

P1) Todo triângulo isósceles tem os ângulos da base congruentes.

P2) Se um triângulo tem dois de seus ângulos congruentes então o triângulo é isósceles.

P3) Em todo triângulo isósceles, a mediana, a bissetriz e a altura relativa à base, são coincidentes.

Para que dois triângulos sejam congruentes é necessário estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que os pares de lados correspondentes sejam congruentes e os pares de ângulos correspondentes. Para determinar a congruência de triângulos existem algumas condições sobre os lados e ângulos que são suficientes para se garantir a congruência. Vejamos:

Crítérios de congruência de triângulos

C1- (LLL) Dois triângulos são congruentes se eles têm os três lados respectivamente congruentes;

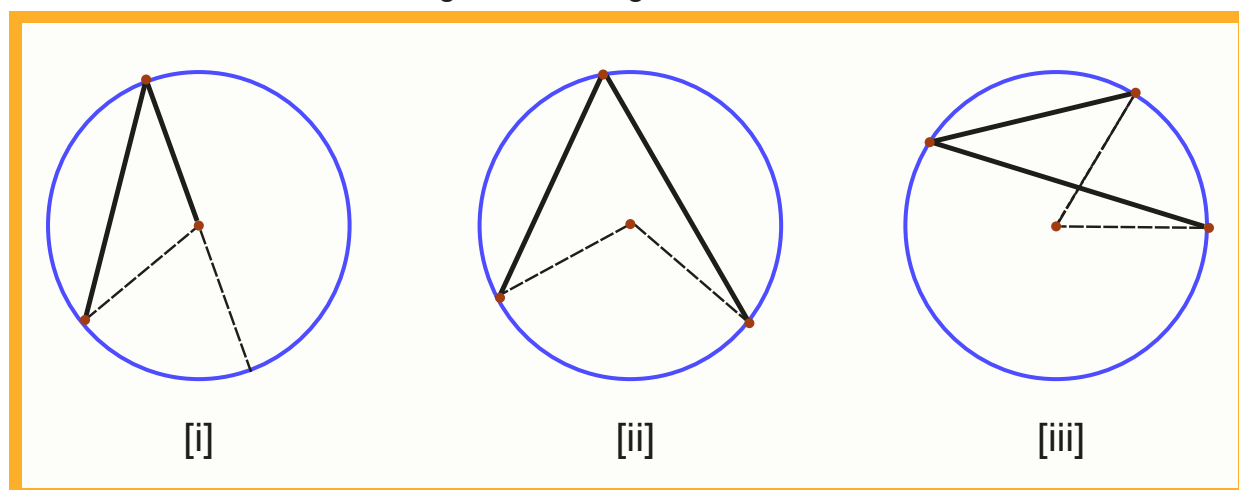
C2- (LAL) Dois triângulos são congruentes se eles têm dois lados e o ângulo compreendido entre esses lados respectivamente congruentes;

C3- (ALA) Dois triângulos são congruentes se eles têm dois ângulos e o lado compreendido entre os ângulos respectivamente congruentes.



Definição: Um ângulo é inscrito em um círculo se seu vértice é um ponto do círculo e seus lados cortam o círculo em pontos diferentes do vértice.

Figura 1.1 – ângulos inscritos



Fonte: Próprio Autor, 2024

Ângulos inscritos em diferentes posições, segundo que o centro do círculo pertence a um lado do ângulo, é ponto interior ou ponto exterior ao ângulo, são representados na figura 1.1.

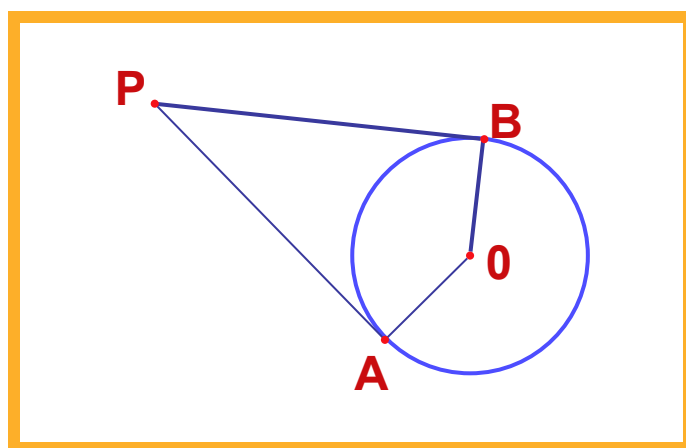
Proposição 1.3

– Todo ângulo inscrito em uma circunferência mede a metade do ângulo central correspondente.

Proposição 1.4

– Se os lados de um ângulo de vértice P são tangentes a uma circunferência nos pontos A e B , então $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Figura 1.2 – Lados de um ângulo de vértice P tangente a uma circunferência.



Fonte: Próprio Autor, 2024



Definição: Um triângulo é **circunscrito** a um círculo se todos os lados do triângulo são tangentes a circunferência; neste caso, dizemos que a circunferência está inscrita no triângulo.



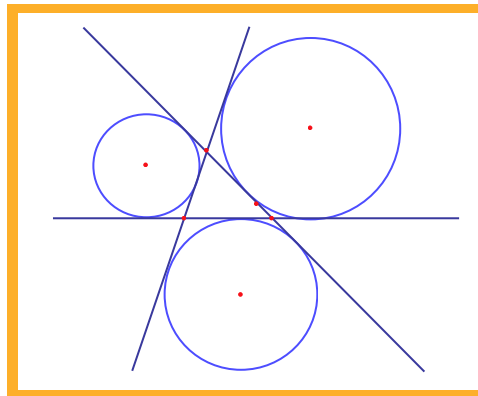
Definição: Um triângulo é **inscrito** em uma circunferência se todos os vértices do triângulo pertencem a circunferência; neste caso, dizemos que a circunferência é circunscrita ao triângulo.



Definição: Uma circunferência é **excrita** a um triângulo se ele for tangente externo simultaneamente a um lado e aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo.

Observa-se que todo triângulo tem três círculos excritos. A figura 1.3 mostra essas três circunferências, bem como, mais a frente na figura 2.5.

Figura 1.3 – Triângulo com os três circunferências excritas



Fonte: Próprio Autor, 2024

► **Teorema 1.2** – Todo triângulo está inscrito em uma circunferência.

► **Teorema 1.3** – Todo triângulo circunscreve uma circunferência.

Proposição 1.5 – Potência de um ponto com respeito a uma circunferência.

Sejam AA' e BB' cordas distintas de uma mesma circunferência que se interceptam num ponto P . Então $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

Proposição 1.6 – Um quadrilátero está inscrito em uma circunferência se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.

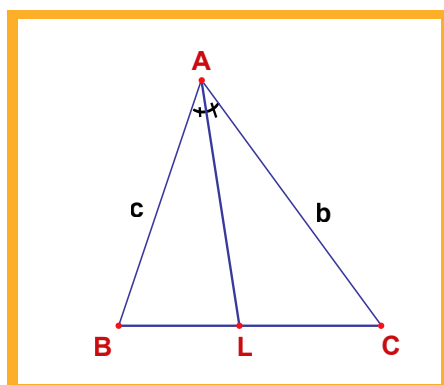
► **Teorema 1.4 – Lei dos senos**

Em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a razão de proporcionalidade é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

► **Teorema 1.5 – Teorema da bissetriz**

Cada bissetriz do triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos comprimentos dos lados adjacentes.

Figura 1.4 – Bissetriz do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC .



Fonte: Próprio Autor, 2024

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e AL a bissetriz do triângulo relativa ao ângulo $\hat{A}$ (figura 1.4).

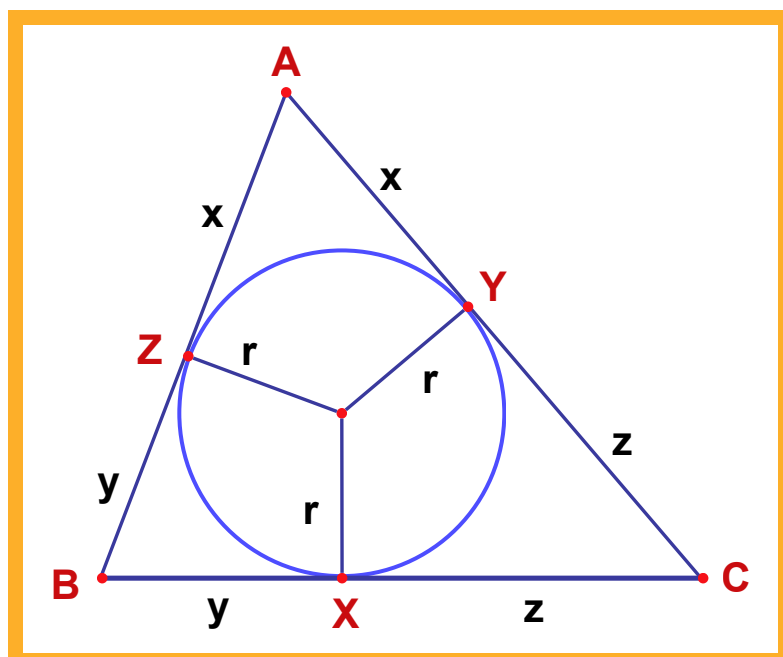
Usando a lei dos senos (Teorema 1.4) para os $\triangle ABL$ e $\triangle ALC$, obtemos

$$\frac{\overline{BL}}{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{c}{\sin(\hat{B}LA)} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{LC}}{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{b}{\sin(\hat{A}LC)}.$$

Como os ângulos $\hat{B}LA$ e $\hat{A}LC$ são suplementares, segue que os senos destes ângulos são iguais e, portanto, $\frac{\overline{BL}}{c} = \frac{\overline{LC}}{b} \Rightarrow \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{c}{b}$. Com raciocínio análogo para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ conclui-se o teorema.

► **Teorema 1.6** – Seja ABC um triângulo qualquer com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ o semi-perímetro s do $\triangle ABC$ é $s = \frac{a+b+c}{2}$. Se a circunferência inscrita no triângulo ABC tem pontos de tangência X , Y e Z nos lados BC , AC e AB , respectivamente então $\overline{AY} = \overline{AZ} = s - a$, $\overline{BZ} = \overline{BX} = s - b$ e $\overline{CX} = \overline{CY} = s - c$.

Figura 1.5 – Pontos de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC



Fonte: Próprio Autor, 2024

Demonstração: Seja o triângulo ABC tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$. Sejam X , Y e Z pertencentes a BC , AC e AB , respectivamente, os pontos de tangência da circunferência inscrita no $\triangle ABC$. Segue da proposição 1.4 que

$$(1) \quad \overline{AZ} = \overline{AY}, \overline{BZ} = \overline{BX} \text{ e } \overline{CX} = \overline{CY}.$$

Os comprimentos dos segmentos determinados nos lados do $\triangle ABC$ pelos pontos X , Y e Z são denotados levando em conta (1) como segue:

$$(2) \quad \overline{AZ} = \overline{AY} = x, \overline{BZ} = \overline{BX} = y, \overline{CX} = \overline{CY} = z.$$

Segue que os comprimentos dos lados do $\triangle ABC$ são dados por

$$a = y + z, b = z + x, c = x + y$$

de onde resulta a expressão para o semi-perímetro do $\triangle ABC$:

$$s = \frac{y + z + z + x + x + y}{2} \Rightarrow s = x + y + z$$

Consequentemente

$$(3) \quad x = s - (y + z) \Rightarrow x = s - a, \quad y = s - (z + x) \Rightarrow y = s - b \text{ e } z = s - (x + y) \Rightarrow z = s - c.$$

Então, substituindo (3) em (2) concluímos

$$\overline{AZ} = \overline{AY} = s - a, \quad \overline{BZ} = \overline{BX} = s - b, \quad \overline{CX} = \overline{CY} = s - c.$$



CAPÍTULO 2

TRIÂNGULOS ESPECIAIS

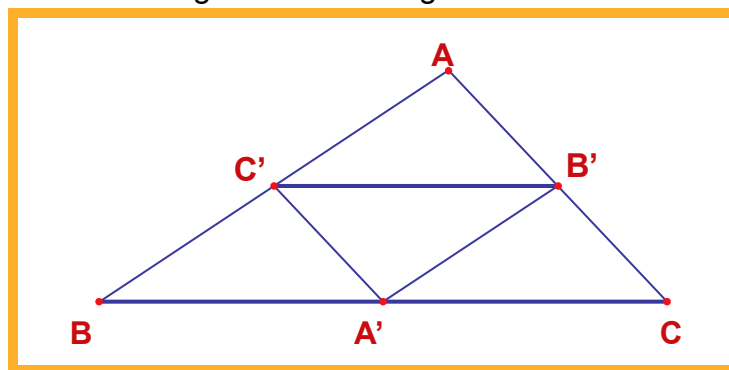
Os triângulos especiais são figuras geométricas que possuem características próprias e facilmente identificáveis, o que facilita sua análise e aplicação em diversos contextos matemáticos. Alguns triângulos quando associados a um dado triângulo ABC recebem nomes específicos. A seguir definiremos nove desses triângulos e a lista continua no capítulo 5.

Consideramos um triângulo ABC arbitrário dado.

2.1 – Triângulo médio

Triângulo médio é o triângulo $A'B'C'$ formado pelos pontos médios dos lados BC , CA , AB do triângulo ABC , onde A' , B' e C' são respectivamente os pontos médios dos lados BC , CA e AB .

Figura 2.1 – Triângulo médio

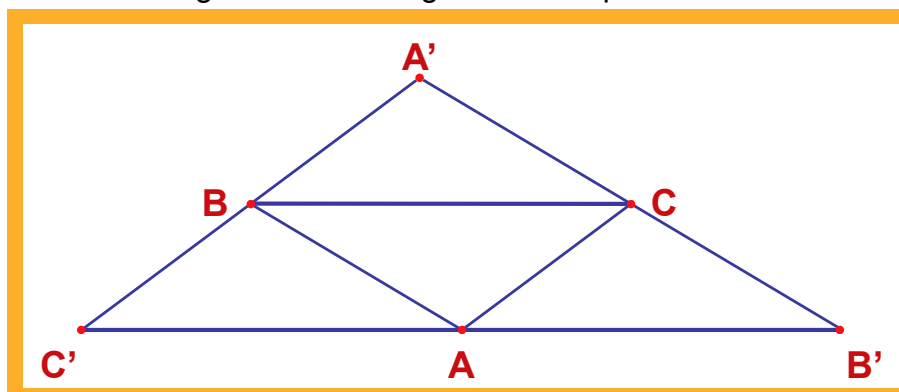


Fonte: Próprio Autor, 2024

2.2 – Triângulo anticomplementar

Triângulo anticomplementar é o triângulo $A'B'C'$ que tem como triângulo médio o triângulo ABC .

Figura 2.2 – Triângulo anticomplementar

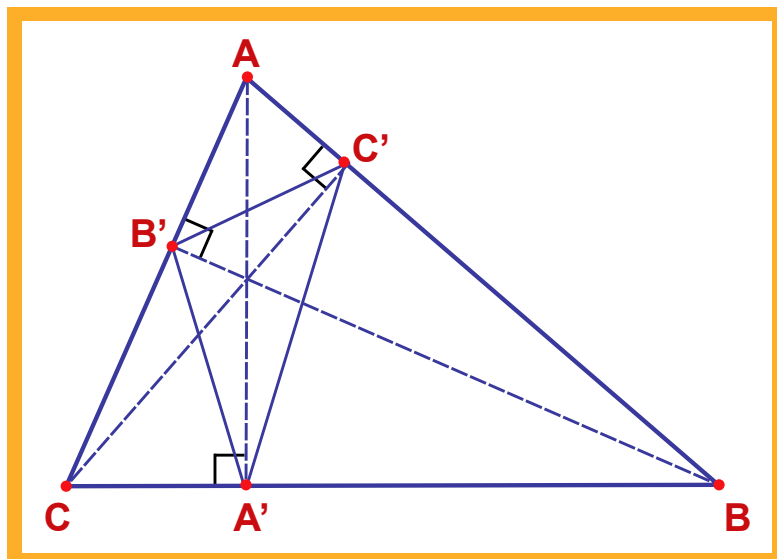


Fonte: Próprio Autor, 2024

2.3 – Triângulo órtico

Triângulo órtico é o triângulo $A'B'C'$ cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC .

Figura 2.3 – Triângulo órtico

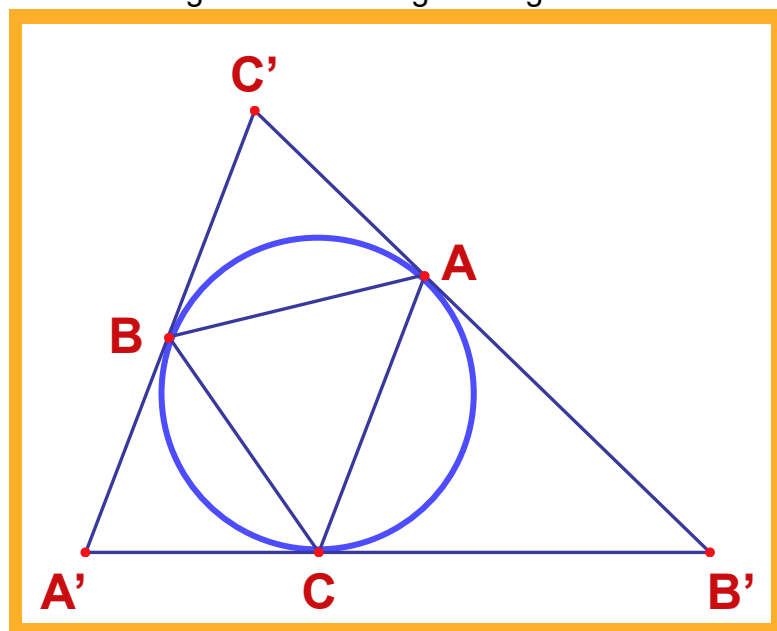


Fonte: Próprio Autor, 2024

2.4 – Triângulo tangencial

Triângulo tangencial é o triângulo $A'B'C'$ determinado pelas interseções das retas tangentes a circunferência circunscrita ao triângulo ABC pelos vértices A , B e C .

Figura 2.4 – Triângulo tangencial

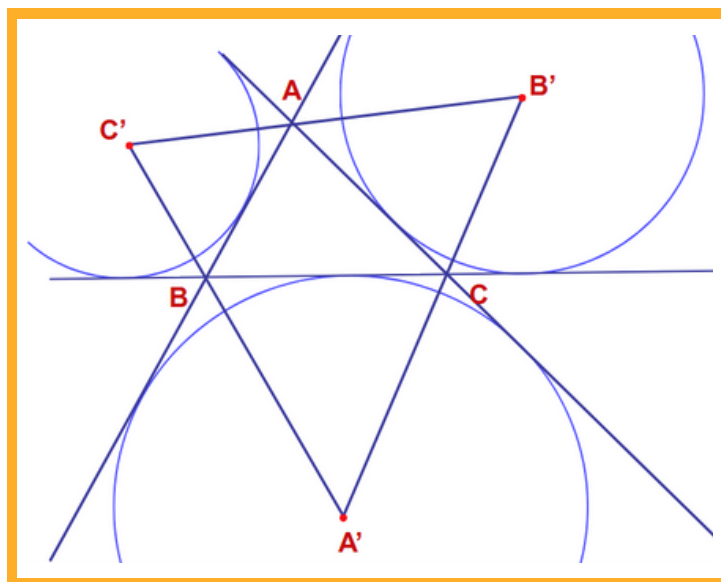


Fonte: Próprio Autor, 2024

2.5 – Triângulo excentral ou tritangencial

Triângulo excentral ou tritangencial é o triângulo cujos vértices são os centros das circunferências excritas ao triângulo dado ABC .

Figura 2.5 – Triângulo excentral

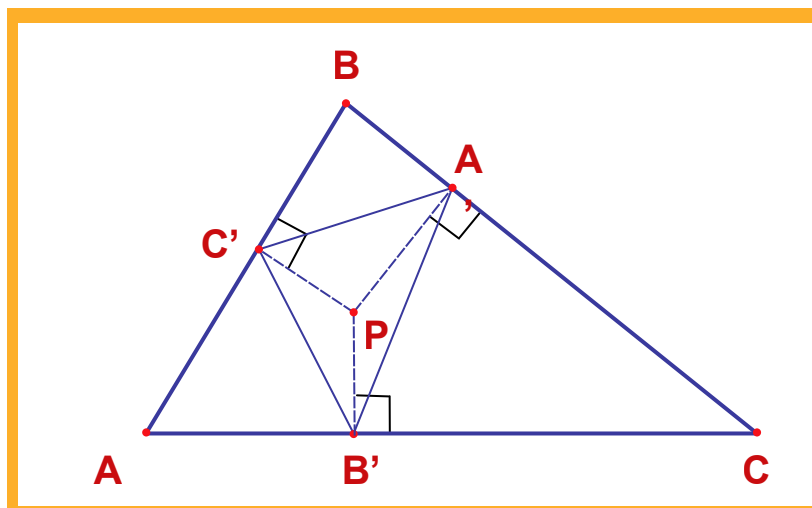


Fonte: Próprio Autor, 2024

2.6 – Triângulo pedal

Seja P um ponto qualquer interior ao triângulo ABC , o **triângulo pedal** para o ponto pedal P é o triângulo $A'B'C'$ cujos vértices são os pés das perpendiculares traçadas de P aos lados do triângulo ABC .

Figura 2.6 – Triângulo pedal

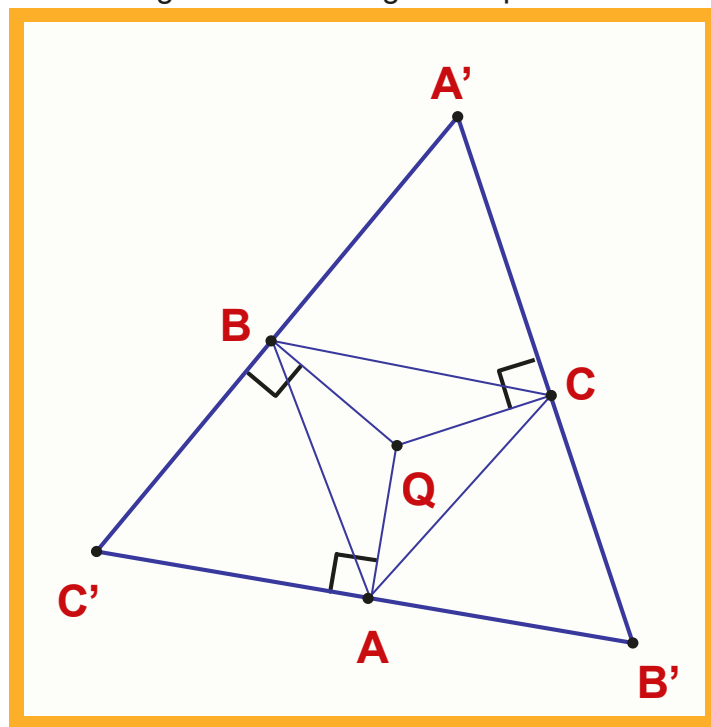


Fonte: Próprio Autor, 2024

2.7 – Triângulo antipedal

Seja Q um ponto qualquer interior ao triângulo ABC . O **triângulo antipedal** é o triângulo $A'B'C'$ formado pelas retas traçadas por A , B e C perpendiculares a QA , QB e QC respectivamente.

Figura 2.7 – Triângulo antipedal



Fonte: Próprio Autor, 2024



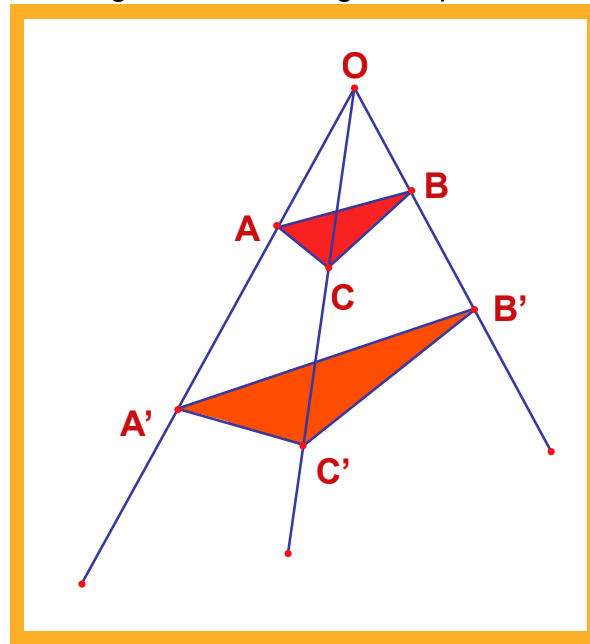
Definição: Um triângulo é **inscrito** em um outro triângulo se todos os vértices dele pertencem aos lados do outro.

O triângulo pedal para o ponto P está inscrito no triângulo ABC e o triângulo Q antipedal para o ponto Q circunscreve o triângulo ABC .

2.8 – Triângulo copolar

Um triângulo $A'B'C'$ é **copolar** do triângulo ABC se e somente se as três retas que unem os vértices A e A' , B e B' , C e C' são concorrentes em um ponto O , e reciprocamente o triângulo ABC é **copolar** do triângulo $A'B'C'$. Esse ponto O é chamado de **ponto ordinário** ou **ponto ideal**.

Figura 2.8 – Triângulo copolar

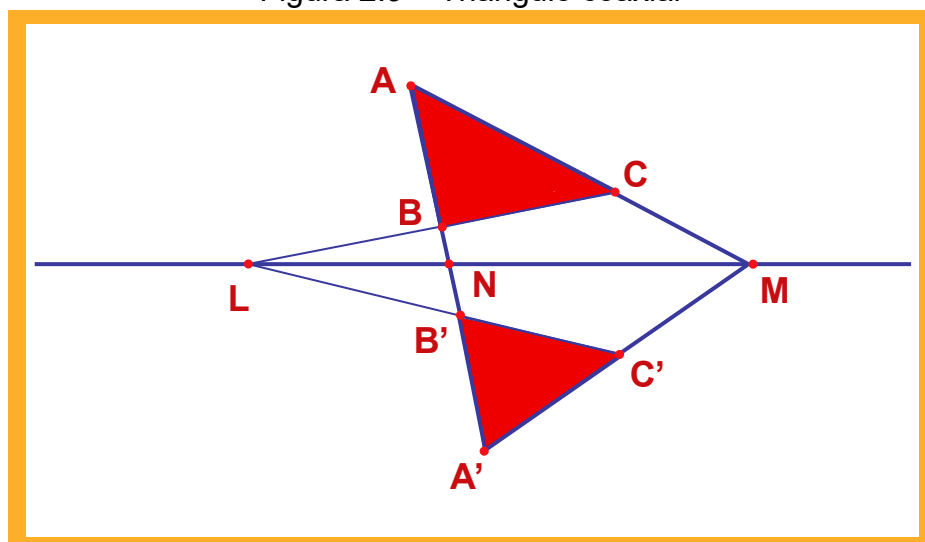


Fonte: Próprio Autor, 2024

2.9 – Triângulo coaxial

Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são ditos **coaxiais** se e somente se os três pontos L , M e N de interseção das retas por BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, AB e $A'B'$ respectivamente são colineares. A reta por L , M e N é chamada de **reta ordinária** ou **reta ideal**.

Figura 2.9 – Triângulo coaxial



Fonte: Próprio Autor, 2024

Os triângulos descritos neste capítulo serão importantes, por facilitar, através das suas características únicas, os cálculos das demonstrações geométricas que seguirão.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES

NO

PLANO

A geometria de Euclides é só uma das várias geometrias, cada uma tendo seus próprios conceitos primitivos, axiomas e teoremas. Felix Klein, em 1872 propôs que a classificação das geometrias fosse feita de acordo com os grupos de transformações que podem ser aplicados sem mudar estes conceitos, axiomas e teoremas. Em particular, a geometria euclidiana é caracterizada pelos grupos de semelhança; estes são transformações ângulo-preservante. Um caso especial importante de uma semelhança é uma isometria.

Isometrias estão na base elementar de congruência: duas figuras são congruentes se e só se pode ser transformada na outra por uma isometria.

Uma **transformação** é uma função bijetora de um conjunto nele mesmo. Assim uma **transformação** no plano é uma correspondência um-a-um de um conjunto de pontos do plano sobre esse mesmo conjunto.

3.1 – Isometrias no plano

As isometrias são transformações entre planos que preservam forma e tamanho das figuras, mediante preservação da distância.

Isometria



Definição: A transformação $T: \pi \rightarrow \pi$ é uma **isometria** se para qualquer par de pontos $X, Y \in \pi$, a distância entre suas imagens $T(X)$ e $T(Y)$ é a mesma que entre os pontos X e Y , ou seja, $d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$.

Duas figuras F e F' no plano π são congruentes se e somente se existe isometria $T: \pi \rightarrow \pi$ tal que $T(F) = F'$.

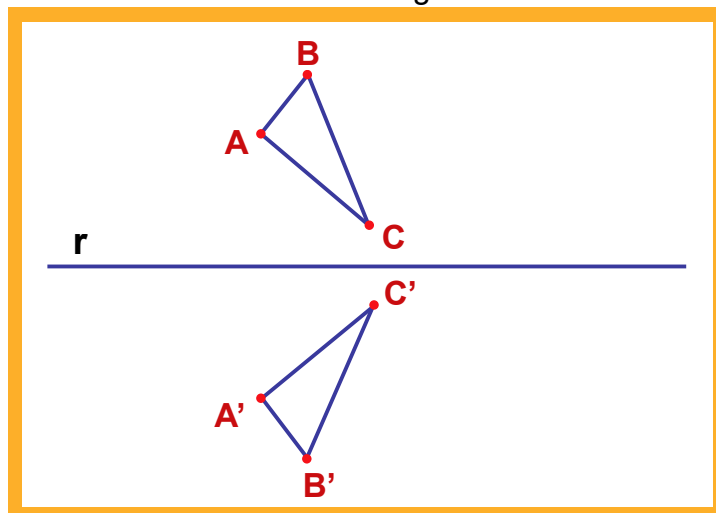
Reflexão em torno de uma reta



Definição: Seja r uma reta no plano π . A *reflexão em torno da reta r* é uma função $\sigma_r: \pi \rightarrow \pi$ assim definida:

- $\sigma_r(X) = X$ para todo $X \in r$,
- $\sigma_r(X) = X'$ para todo $X \notin r$, X' é a imagem de X pela reflexão em r , ou seja, r é a reta mediatriz do segmento XX' .

Figura 3.0 – Reflexão de um triângulo em torno de uma reta



Fonte: Próprio Autor, 2024

Translação

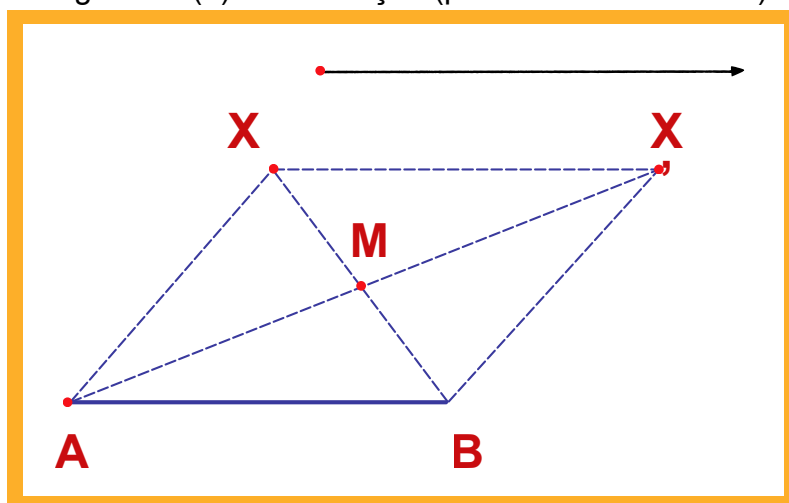
Seja um vetor $\mathbf{v}$ ou segmento orientado AB , isto é, $\vec{v} = AB$, onde A é a origem e B é o extremo final de AB .



Definição: Sejam A e B pontos distintos do plano π . A **translação** segundo o segmento orientado AB é uma função $\tau_{AB} : \pi \rightarrow \pi$ assim definida:

- a cada ponto $X \in \pi$ a sua imagem $X' = \tau_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados, se A , B e X não são colineares.

Figura 3.1(a) – Translação (pontos não colineares)



Fonte: Próprio autor, 2024

- se A , B e X são colineares então a translação τ_{AB} é tal que XX' está na reta por A e B , e os segmentos AX' e BX' têm o mesmo ponto médio.

Figura 3.1(b) – Translação (pontos colineares)



Fonte: Próprio Autor, 2024

Rotação

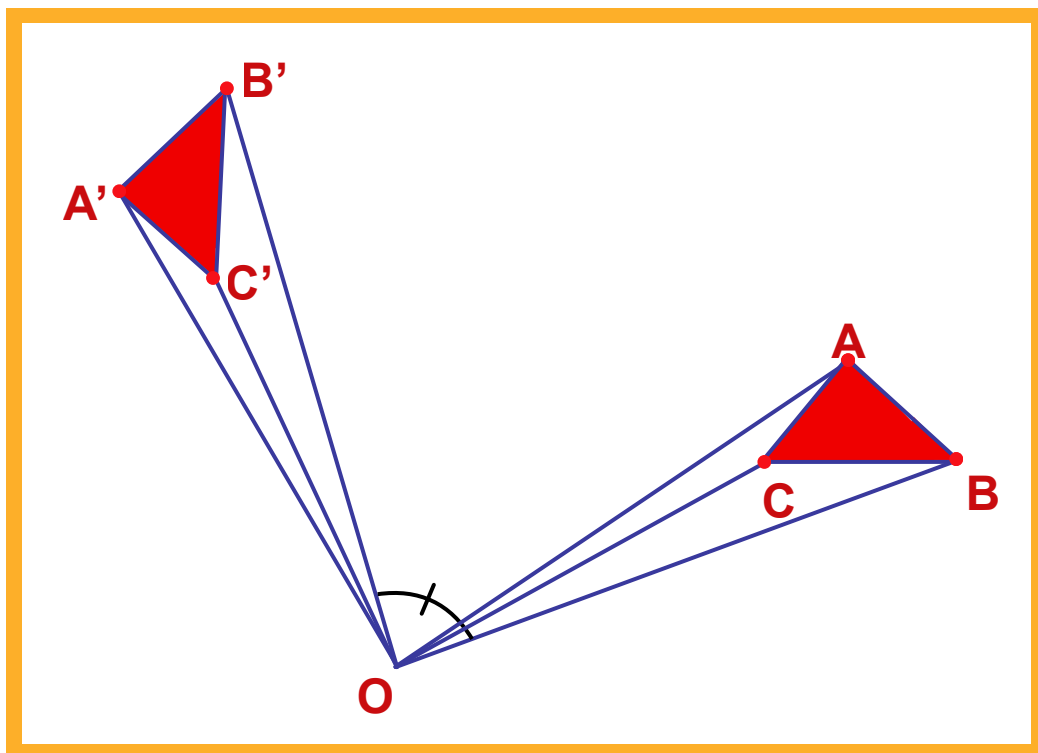
Um ângulo é **orientado** se OA é lado inicial e OB lado final de $\hat{A}OB$ e o ângulo $\hat{A}OB$ é positivo se de OA para OB o ângulo é percorrido no sentido anti-horário, caso contrário o ângulo é negativo.



Definição: Seja O um ponto do plano π e $\hat{\alpha} = \hat{A}OB$ um ângulo orientado de vértice O . Uma rotação em torno do ponto O e de ângulo orientado é uma função $\rho_{O,\alpha} : \pi \rightarrow \pi$ definida por:

- $\rho_{O,\alpha}(O) = O$
- para todo ponto $X \neq O$, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$, tal que $\overline{OX} = \overline{OX'}$ e o ângulo orientado $\hat{X}OX'$ é congruente com $\hat{\alpha}$ e tem a sua mesma orientação.

Figura 3.2 – Rotação

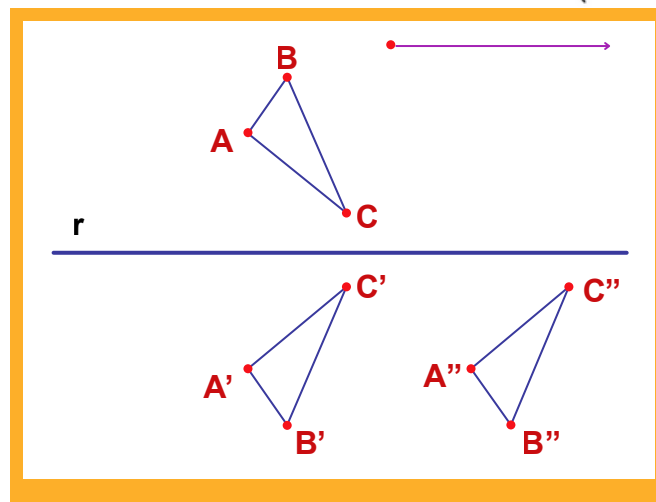


Fonte: Próprio Autor, 2024

Reflexão com deslizamento

Definição: Sejam AB um segmento orientado e r uma reta do plano π paralela a AB . Uma *reflexão com deslizamento* ou uma *translação refletida* em torno da reta r e segundo o segmento orientado AB é uma isometria $\rho_{AB,r} : \pi \rightarrow \pi$ tal que a todo ponto $X \in \pi$ faz corresponder um ponto X' obtido ao efetuar a reflexão em torno da reta r e em seguida a translação segundo o segmento orientado AB , ou vice versa.

Figura 3.3 – Reflexão com deslizamento $\rho_{AB,r}(\triangle ABC) = \triangle A''B''C''$.



Fonte: Próprio autor, 2024

► Teorema 3.1 – Classificação das isometrias no plano

Toda isometria no plano, diferente da identidade, é uma translação, rotação, reflexão ou reflexão com deslizamento.

3.2 – Homotetia

Definição: Seja O ponto fixo no plano π e K um número real não nulo. Uma homotetia no plano é uma transformação $H : \pi \rightarrow \pi$ definida por:

- $H(O) = O$
- $H(X) = X', \forall X \neq O$, onde O , X e X' são pontos colineares e $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$.

Assim definida a homotetia, o ponto O é o *centro* da homotetia e o número k é a *razão* da homotetia. Uma homotetia $H_{O,K}$ é chamada *direta* se $k > 0$, note que se a *razão* é positiva os pontos X e X' pertencem à mesma semirreta de origem O e a homotetia é dita *inversa* se $k < 0$, neste caso X e X' estão em semirretas opostas.

Notação: $H_{O,K}$ homotetia de centro O e razão k .

3.3 – Semelhança



Definição: Uma **semelhança** no plano é uma transformação $S: \pi \rightarrow \pi$ que para pontos arbitrários X e Y de π faz corresponder $S(X) = X'$ e $S(Y) = Y'$ de maneira tal que existe um número real k tal que $d(X', Y') = k \cdot d(X, Y)$.

O número k é chamado **razão de semelhança**.

3.4 – Semelhança de triângulos

Triângulos semelhantes são triângulos tais que existe uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes proporcionais. Usaremos a notação $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ para indicar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

► **Teorema 3.2** – Dois triângulos semelhantes têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos cumprem uma das três condições abaixo então eles são semelhantes:

- i) Têm os lados correspondentes proporcionais;
- ii) Têm dois ângulos congruentes;
- iii) Têm ângulos correspondentes iguais compreendidos entre lados respectivamente proporcionais.

Demonstração: Seja $S: \pi \rightarrow \pi$ uma semelhança de razão r tal que faz corresponder ao triângulo ABC o triângulo $A'B'C'$, com $A' = S(A)$, $B' = S(B)$, $C' = S(C)$. Pela definição de semelhança segue que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r$$

portanto, os triângulos têm os lados homólogos proporcionais. Agora para provar que os ângulos são iguais, vamos supor que seja $0 < r < 1$. A homotetia H de centro A e razão, transforma o $\triangle ABC$ no triângulo $AB''C''$, com $B''C''$ paralela a BC . Então $\hat{B}'' = \hat{B}$ e $\hat{C}'' = \hat{C}$. Por outro lado, os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes pois

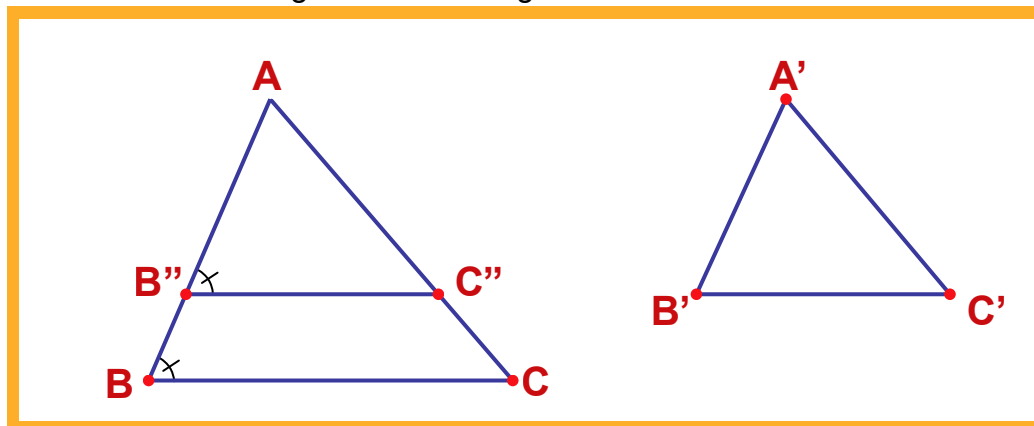
$$\overline{AB''} = \overline{A'B'} (= r, \overline{AB})$$

$$\overline{AC''} = \overline{A'C'} (= r, \overline{AC})$$

e

$$\overline{B''C''} = \overline{B'C'} (= r, \overline{BC})$$

Figura 3.4 – Triângulos semelhantes



Fonte: Próprio autor, 2024

Logo, os ângulos correspondentes são iguais, ou seja, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

i) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos com lados proporcionais, ou seja,

$$(1) \quad \overline{A'B'} = r, \overline{AB}, \quad \overline{A'C'} = r, \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{B'C'} = r, \overline{BC}$$

para um certo $r > 0$. A homotetia de centro A e razão r transforma o $\triangle ABC$ no $\triangle AB''C''$ cujos lados medem

$$(2) \quad \overline{AB''} = r, \overline{AB}, \quad \overline{AC''} = r, \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{B''C''} = r, \overline{BC}$$

assim, pelas equações (1) e (2) temos que os triângulos $\triangle AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes porque têm os lados iguais. Como $AB''C''$ é semelhante a ABC , segue então que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

ii) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos com ângulos correspondentes iguais, ou seja,

$$(3) \quad \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \text{e} \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

Sobre as retas AB e AC tomemos os pontos B'' e C'' respectivamente, de modo que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. Temos que os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes porque têm um ângulo igual ($\hat{A} = \hat{A}'$) compreendido entre lados iguais. Logo $\hat{B''} = \hat{B}'$, e por (3) segue que $\hat{B''} = \hat{B}$, conclui-se que as retas $B''C''$ e BC são paralelas e então os $\triangle AB''C''$ e $\triangle ABC$ são semelhantes. Mas como os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes temos que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes, como desejávamos.

iii) Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\overline{A'B'} = r \cdot \overline{AB}$ e $\overline{A'C'} = r \cdot \overline{AC}$.

Analogamente ao item (ii) tomamos sobre as retas AB e AC , respectivamente, os pontos B'' e C'' com $\overline{AB''} = r \cdot \overline{AB}$ e $\overline{AC''} = r \cdot \overline{AC}$. Observamos que essa homotetia é uma semelhança entre o $\triangle ABC$ e o $\triangle AB''C''$. Como $\triangle AB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, segue que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

3.5 – Inversão

A inversão é uma transformação que preserva o conjunto de todos os círculos e retas, isto é, uma correspondência de um círculo em um círculo ou em uma reta e uma reta inverte-se em um círculo ou uma reta.

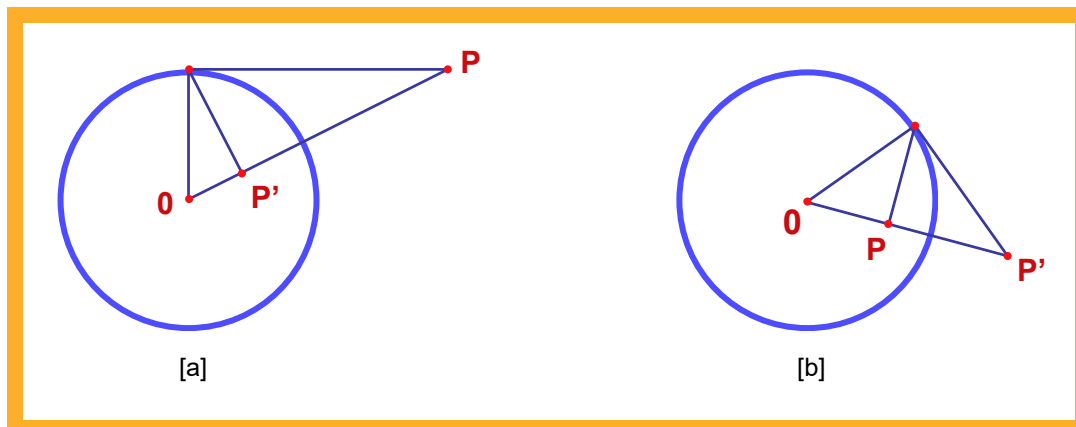


Definição: O plano euclidiano com um ponto ideal ou ponto no infinito anexado é chamado *plano inversivo*. Este ponto ideal é considerado pertencente a toda reta do plano.



Definição: Sejam O um ponto fixo no plano, diferente do ponto ideal, e k um número positivo fixo. Para cada ponto P no plano, $P \neq O$, definimos o seu inverso P' o círculo de centro O e raio k tomando P' como ponto na semirreta OP tal que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k$.

Figura 3.5 – Inversão em um círculo



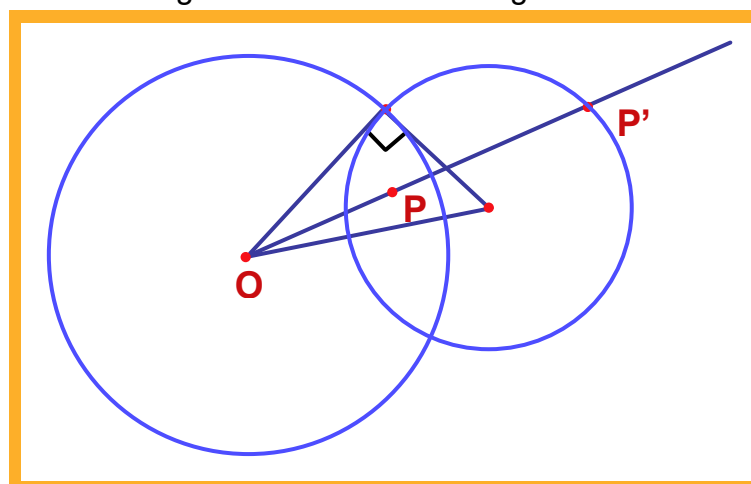
Fonte: Próprio Autor, 2024

Esta função dos pontos no plano é chamada ***inversão em um círculo*** ou, também, ***reflexão em um círculo***, onde o ponto O é o centro da inversão, k é o raio da inversão e k^2 é sua potência. No caso do ponto está fora do círculo de inversão (figura 3.5 a) o seu inverso vai ser um ponto interior do círculo. Já para um ponto interior do círculo de inversão (figura 3.5 b) seu inverso é exterior ao círculo.



Definição: Dois círculos são ditos ***ortogonais*** se eles se intersectam segundo um ângulo reto, de forma que, em cada ponto de interseção, a tangente de cada um contém um diâmetro do outro círculo.

Figura 3.6 – Círculos ortogonais



Fonte: Próprio Autor, 2024

Observe na figura 3.6 que os dois círculos são ortogonais e os pontos exteriores de um círculo ortogonal ao círculo de inversão, levam estes pontos para a parte interior do círculo de inversão, trazendo os pontos interiores para a parte exterior do círculo de inversão, transformando desta maneira, o círculo de inversão no próprio círculo.

▶ **Teorema 3.3** – Se P e P' são pontos distintos inversos um do outro em um círculo ω , então qualquer círculo σ passando por P e P' é ortogonal ao círculo ω .

▶ **Teorema 3.4** – Se um ponto descreve um círculo passando pelo centro de inversão então o ponto inverso descreve uma reta perpendicular à reta que une o centro do círculo dado ao centro de inversão.

▶ **Teorema 3.5** – O inverso de qualquer círculo é um círculo.

▶ **Teorema 3.6** – Se dois círculos se intersectam, seu ângulo de interseção é igual ao ângulo de interseção das curvas inversas nos correspondentes pontos.

▶ **Teorema 3.7** – Círculos ortogonais invertem em círculos ortogonais.



Euclides de Alexandria

ΚΑΠÍTULO 4

TEOREMΔS

CLΔSSICOS

Os teoremas clássicos do triângulo são fundamentais na geometria, fornecendo insights profundos sobre as relações entre seus elementos. É necessário olhar para a suficiência dos clássicos teoremas sobre o triângulo para que possamos ter uma idéia sobre o assunto. Esses teoremas não apenas enriquecem a teoria geométrica, mas também têm aplicações práticas significativas em diversas disciplinas, destacando-se como pilares do conhecimento matemático ao longo dos séculos. No século dezenove foi realizado um intenso estudo sobre o triângulo que o campo poderia parecer esvaziado, porém, até hoje, teoremas elementares continuam aparecendo. Destacaremos aqui os mais expressivos.

4.1 – Teorema de Menelaus

Menelaus de Alexandria, um dos mais antigos geômetras gregos (100 d.C, não confundir com Menelaus de Esparta) escreveu o tratado chamado ***Sphaerica*** em que ele usou uma propriedade do triângulo esférico e deu a entender que a correspondente propriedade de um triângulo plano era bem conhecida. Talvez fosse, mas nenhum registro dela foi achado até o momento. Resta-nos, simplesmente, chamar essa propriedade de **Teorema de Menelaus**.



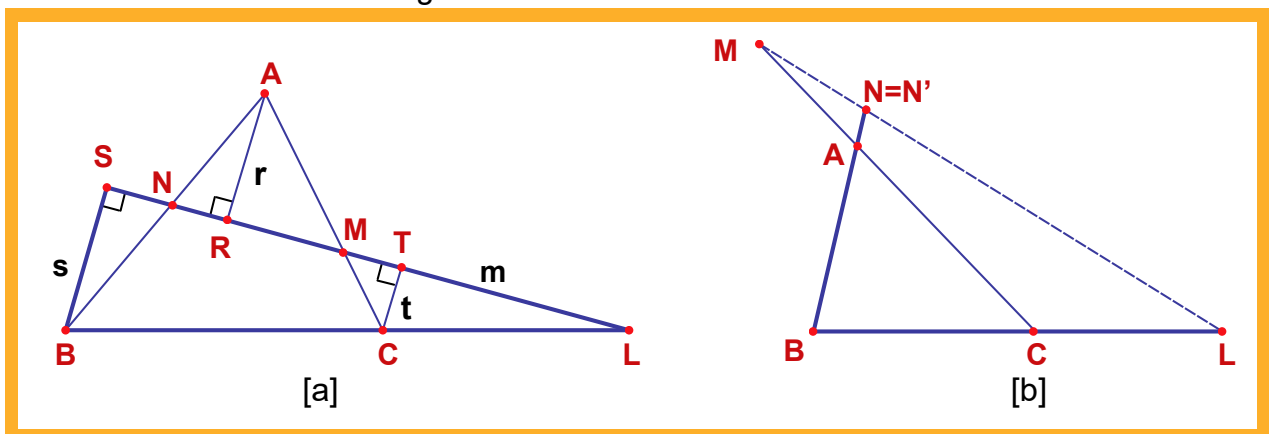
Menelau de Alexandria

► **Teorema 4.1** – Sejam L , M e N pontos sobre as retas determinadas respectivamente pelos lados BC , CA e AB de um triângulo ABC e não coincidentes com os vértices A , B e C . Então os pontos L , M e N são colineares se e somente se

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1$$

Demonstração: Sejam L , M e N pontos sobre as retas determinadas respectivamente pelos lados BC , CA e AB de um dado triângulo ABC e não coincidentes com os vértices A , B e C . Para provar a primeira parte do teorema vamos considerar L , M e N pontos colineares e m a reta que os contém. Traçamos as perpendiculares a m passando por A , B e C .

Figura 4.1 – Teorema de Menelaus



Fonte: Próprio Autor, 2024

Temos então que os pares de triângulos $\triangle BLS$ e $\triangle CLT$; $\triangle CMT$ e $\triangle AMR$; $\triangle BNS$ e $\triangle ANR$ que são semelhantes pelo teorema 3.2 ii), em consequência, temos as relações

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{s}{t}; \quad \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{t}{r}; \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{r}{s}$$

onde r , s e t são respectivamente os comprimentos das alturas dos triângulos $\triangle ANM$ (referente ao vértice A), $\triangle BNS$ (referente ao vértice B) e $\triangle CLM$ (ao vértice C).

Assim, considerando a direção temos que $\overline{LC} = -\overline{CL}$, o que nos conduz a

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1 = \frac{s}{t} \cdot \frac{t}{r} \cdot \frac{r}{s}$$

A razão é negativa quando a reta por L , M e N tem que cortar um dos lados do triângulo exteriormente. Na figura 4.1(a), L corta o lado BC exteriormente e LC mede-se “para trás” no sentido de C e, por isso, se conta negativamente.

Por hipótese L , M e N são pontos colineares e distintos dos vértices do triângulo, isso exclui a possibilidade dos três pontos pertencerem um a cada lado do triângulo ABC e também exclui a outra possibilidade de ter um ponto em um lado do triângulo e os outros dois pontos exteriores ao $\triangle ABC$. Assim, resta-nos apenas as duas situações descritas na figura 4.1.

Para a demonstração do recíproco, sejam L , M e N pontos nos lados BC , CA e AB respectivamente do $\triangle ABC$, tais que

$$(1) \quad \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1$$

Suponha que N' seja o ponto de interseção do lado AB com a reta que passa por L e M (figura 4.1b). Então L , M e N' são colineares, e pela primeira parte desse teorema temos que

$$(2) \quad \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN'}}{\overline{N'B}} = -1$$

Igualando (1) e (2) obtemos $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AN'}}{\overline{N'B}}$, onde A e B são pontos distintos

e N e N' estão sobre a reta por A e B , assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AN} + \overline{NB}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} + 1 = \frac{\overline{AN'}}{\overline{N'B}} + 1 = \frac{\overline{AN'} + \overline{N'B}}{\overline{N'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{N'B}}$$

a primeira e a última fração tem numeradores iguais e diferentes de zero, então os denominadores também são iguais, portanto $\overline{NB} = \overline{N'B}$, o que implica N coincidente com N' . Logo L , M e N são colineares. $\square$

4.2 – Teorema de Ceva

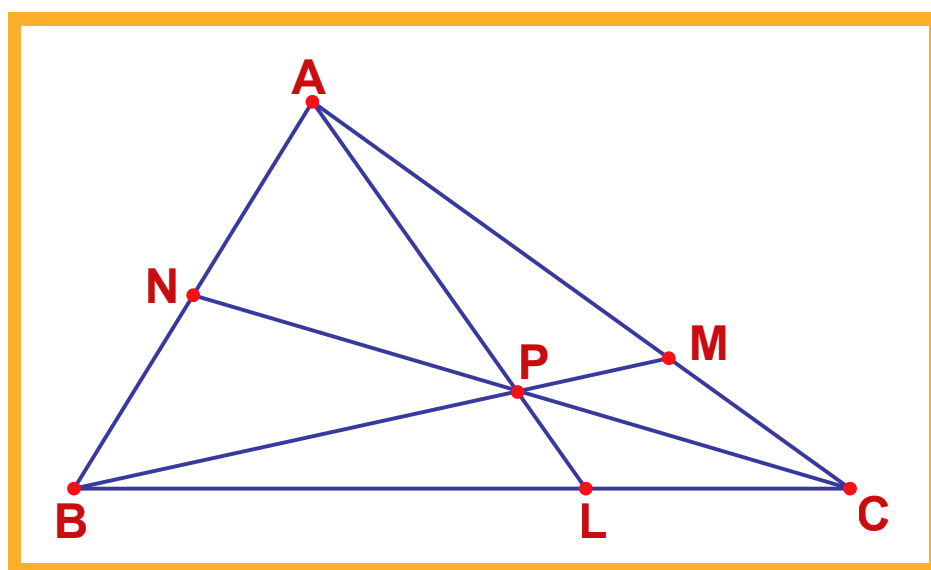
Giovanni Ceva (1648-1734) engenheiro e geômetra italiano. Seu teorema está intimamente relacionado ao Teorema de Menelaus que tinha sido esquecido e foi redescoberto e publicado por Ceva em 1678.

► **Teorema 4.2** – Sejam L , M , N pontos sobre as retas respectivamente pelos lados BC , AC , AB e não coincidentes com os vértices do triângulo ABC . Então as cevianas AL , BM , CN , do triângulo ABC são concorrentes em um ponto P se e somente se

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1$$

Demonstração: Sejam L , M , N pontos sobre os lados BC , AB , AC e não coincidentes com os vértices do triângulo ABC , vamos supor que as cevianas AL , CN e BM se encontram em um ponto P .

Figura 4.2 – Teorema de Ceva



Fonte: Próprio autor, 2024

Lembrar que as áreas de triângulos com alturas iguais são proporcionais às bases dos triângulos. Com relação à figura 4.2 nós temos

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\text{área}\Delta ABL}{\text{área}\Delta ALC} = \frac{\text{área}\Delta PBL}{\text{área}\Delta PLC} = \frac{\text{área}\Delta ABL - \text{área}\Delta PBL}{\text{área}\Delta ALC - \text{área}\Delta PLC} = \frac{\text{área}\Delta ABP}{\text{área}\Delta CAP}$$

semelhantemente

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\text{área}\Delta BCP}{\text{área}\Delta ABP}, \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\text{área}\Delta CAP}{\text{área}\Delta BCP}$$

agora multiplicando as três equações, obtemos

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\text{área}\Delta ABP}{\text{área}\Delta CAP} \cdot \frac{\text{área}\Delta BCP}{\text{área}\Delta ABP} \cdot \frac{\text{área}\Delta CAP}{\text{área}\Delta BCP} = 1$$

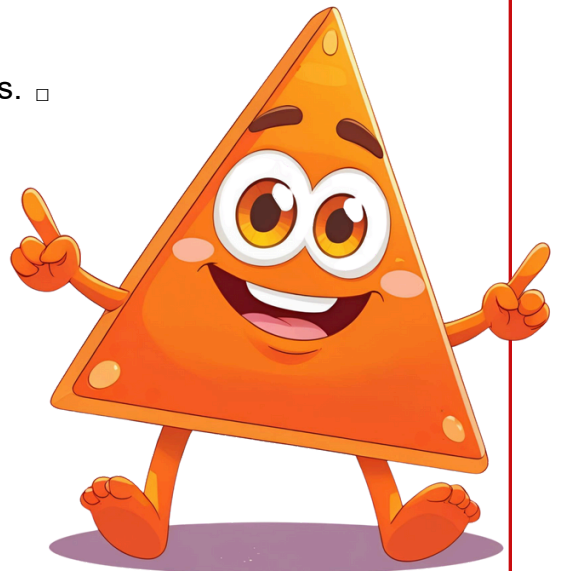
Para provar a segunda parte do teorema, vamos supor que $\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = 1$ e as

duas primeiras cevianas (AL e BM) concorrem em P e a terceira ceviana passando

por P seja CN' . Então pela primeira parte deste teorema $\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN'}}{\overline{N'B}} = 1$,

consequentemente $\frac{\overline{AN'}}{\overline{N'B}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}$ e, portanto, $N' = N$

Logo as cevianas AL , BM e CN são concorrentes. $\square$



4.3 – “Dualidade” dos teoremas de Menelaus e Ceva

Dois enunciados são chamados **duais** um do outro se cada um é transformado no outro pelo intercâmbio entre as palavras “pontos” e “retas”, e também dos termos associados “colinear” e “concorrente”.

Usando o conceito de **dual** enunciado acima, dizemos que um triângulo é ele mesmo uma figura auto dual: a figura formada por três pontos não colineares e os segmentos unindo os pares desses pontos; é também a figura formada por três retas não concorrentes e os três pontos de interseção dos pares dessas retas. Assim, um triângulo é também trilateral.

Enquanto o teorema de Menelaus discute a *colinearidade* de três *pontos* sobre as *retas* (lados) de um triângulo, o teorema de Ceva considera a *concorrência* de três *retas* sobre os *pontos* (vértices) de um triângulo. Assim, cada um é o *dual* do outro, no entanto, o teorema de Menelaus foi conhecido pelo ano 100 d.C, enquanto o de Ceva não foi detectado até 1678, ou seja, mais de 1500 anos os separa.

► Teorema de Menelaus implica o de Ceva

Três cevianas AL , BM , CN do triângulo ABC são concorrentes se e somente se

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = 1$$

Demonstração: Sejam AL , BM , CN três cevianas do $\triangle ABC$. Suponhamos que as cevianas se encontrassem no ponto P como na figura 4.2. Como C , P e N são pontos respectivamente sobre os lados BL , AL , AB do $\triangle ABL$, então pelo teorema de Menelaus C , P e N são colineares e vale a relação

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{LP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1$$

(3)

Analogamente para o triângulo ALC , temos que B , P e M são colineares e

$$\frac{\overline{LB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PL}} = -1$$

(4)

Agora multiplicando as equações (3) e (4), obtemos

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = 1$$

O que conclui a prova do teorema de Ceva pelo teorema de Menelaus. □

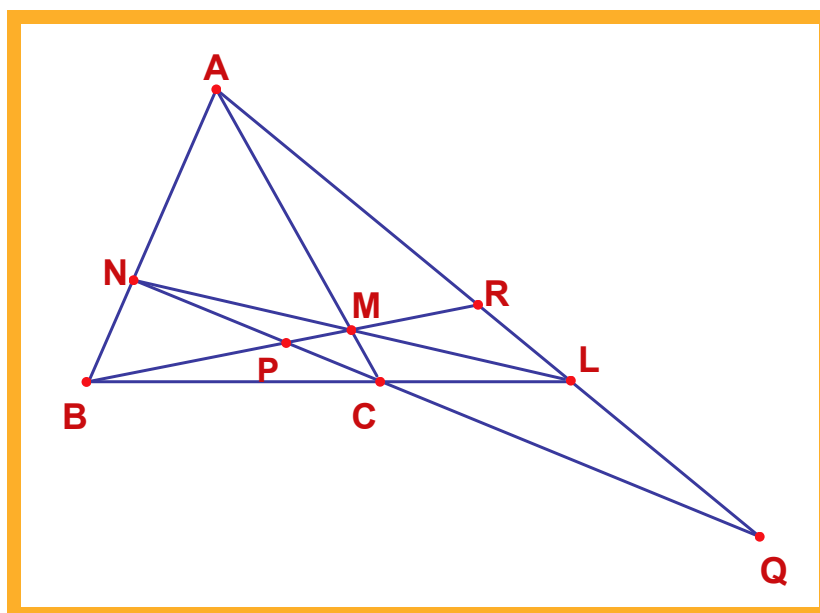
► Teorema de Ceva implica o de Menelaus

Sejam L , M e N três pontos respectivamente sobre os lados BC , CA e AB do triângulo ABC . Então, os pontos L , M e N são colineares se e somente se

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1$$

Demonstração: Sejam L , M e N três pontos respectivamente sobre os lados BC , CA e AB do triângulo ABC . E sejam os pontos de interseção respectivamente, P de CN com BM , Q de CN com AL e R de AL com BM .

Figura 4.2 - Dualidade” dos teoremas de Menelaus e Ceva



Fonte: Próprio autor, 2024

Aplicando o teorema de Ceva a cada um dos seis triângulos listados no quadro 1 e multiplicando as seis equações da coluna 4, obtemos

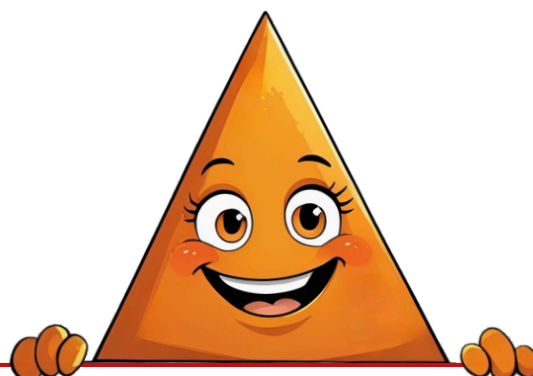
$$\left(\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \right)^2$$

O teorema segue desde que qualquer um ou os três pontos L , M e N sejam externos aos lados do $\triangle ABC$.

Quadro 1 - Dualidade” dos teoremas de Menelaus e Ceva

Triângulo	Cevianas	Ponto de concorrência	Equação Resultante
$\triangle LAB$	LN, AC, BR	M	$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \frac{\overline{BC}}{\overline{CL}} \frac{\overline{LR}}{\overline{RA}} = 1$
$\triangle MBC$	ML, BA, CP	N	$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \frac{\overline{CA}}{\overline{AM}} \frac{\overline{MP}}{\overline{PB}} = 1$
$\triangle NCA$	NM, CB, AQ	L	$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \frac{\overline{AB}}{\overline{BN}} \frac{\overline{NQ}}{\overline{QC}} = 1$
$\triangle LMA$	LC, MR, AN	B	$\frac{\overline{MC}}{\overline{CA}} \frac{\overline{AR}}{\overline{RL}} \frac{\overline{LN}}{\overline{NM}} = 1$
$\triangle MNB$	MA, NP, BL	C	$\frac{\overline{NA}}{\overline{AB}} \frac{\overline{BP}}{\overline{PM}} \frac{\overline{ML}}{\overline{LN}} = 1$
$\triangle NLC$	NB, LQ, CM	A	$\frac{\overline{LB}}{\overline{BC}} \frac{\overline{CQ}}{\overline{QN}} \frac{\overline{NM}}{\overline{ML}} = 1$

Fonte: Próprio autor, 2024



4.4 – Teorema dos dois triângulos de Desargues

A teoria geométrica de perspectiva foi inaugurada pelo arquiteto Filippo Brunelleschi (1377- 1446), que projetou a cúpula octogonal da catedral de Florença, e também o Palácio Pitti. Um estudo mais a fundo da mesma teoria foi iniciado por outro arquiteto e engenheiro militar, Girard Desargues (1591-1661), cujo teorema dos dois triângulos foi mais tarde considerado tão importante quanto o teorema de Pappus. Desargues foi um profeta da geometria projetiva, mas não foi reconhecido em seu tempo. O teorema que leva o seu nome foi publicado primeiro em 1648 por seu amigo Abraham Bosse, vindo a se tornar no século dezenove, uma das proposições fundamentais da geometria projetiva.

O teorema de Desargues pode ser deduzido do teorema de Pappus, mas os detalhes são complicados, e nós o demonstraremos mais facilmente usando o Teorema de Menelaus.

Uma boa ilustração de dualidade, no sentido mencionado no parágrafo 4.3, é o teorema de Desargues, uma vez que, triângulos copolares e triângulos coaxiais são conceitos duais. O teorema estabelece que esses dois conceitos duais são equivalentes, sempre que, permitamos elementos ideais.

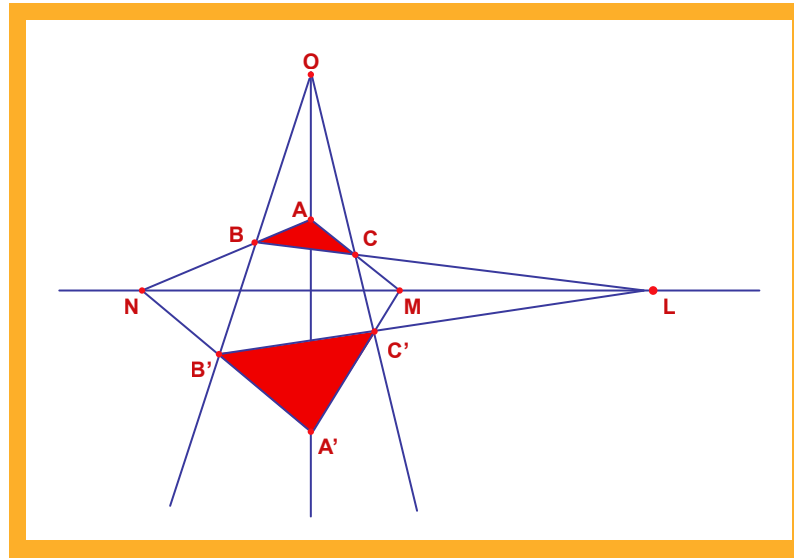


Girard Desargues

► **Teorema 4.4** – Se dois triângulos são copolares, então eles são coaxiais; reciprocamente, se dois triângulos são coaxiais então eles são copolares.

Demonstração: Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos copolares com ponto ordinário O .

Figura 4.4 – Teorema dos dois triângulos de Desargues



Fonte: Próprio autor, 2024

Aplicando o teorema de Menelaus (§4.1) para o ΔOBC com pontos L , C' , B' colineares; para o ΔOCA com pontos M , A' , C' colineares e para o ΔOAB com pontos N , B' , A' colineares, obtemos

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'O}} \cdot \frac{\overline{OB'}}{\overline{B'B}} = -1 \quad \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'O}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{C'C}} = -1 \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'A}} = -1$$

E multiplicando estas três equações membro a membro temos o resultado

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1$$

Deste modo, L , M e N estão respectivamente sobre os lados BC , AC e AB do ΔABC , então pelo Teorema de Menelaus L , M e N são colineares, isto é, os triângulos ΔABC e o $\Delta A'B'C'$ são coaxiais.

Reciprocamente, suponha que o ΔABC e o $\Delta A'B'C'$ são triângulos coaxiais onde os pontos de interseção das retas por BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, AB e $A'B'$

são respectivamente, L , M e N . Sejam BB' e CC' retas que se intersectam em um ponto O . Agora os triângulos MCC' e NBB' são copolares em L . Consequentemente, pela primeira parte desta demonstração estes triângulos são coaxiais; isto é, A , A' e O são colineares. Deste modo, triângulos ABC e $A'B'C'$ são copolares com ponto ordinário O . $\square$

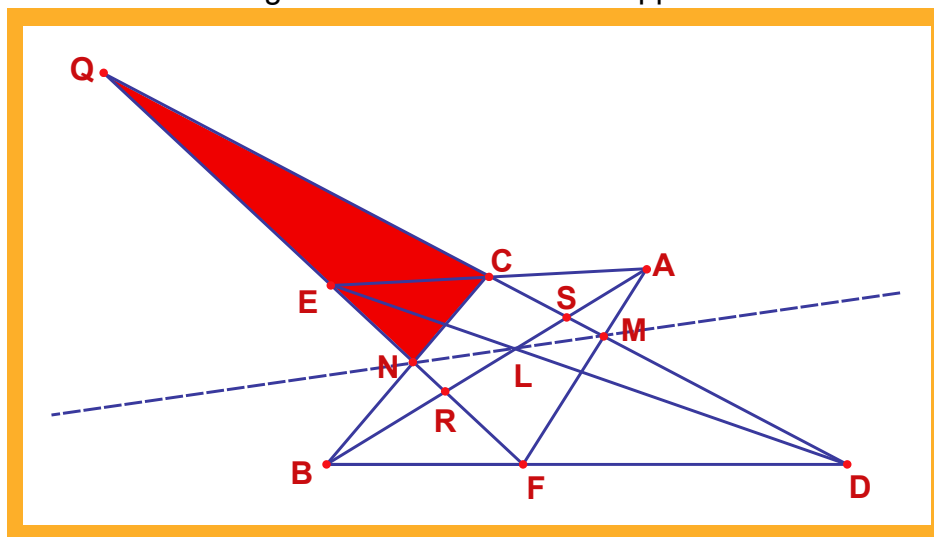
4.5 – Teorema de Pappus

Pappus de Alexandria foi apropriadamente chamado de o último grande geômetra da antiguidade. O teorema particular que leva o seu nome, um dos mais importantes da geometria plana, foi provado por ele em mais ou menos 300 d.C., mas seu papel fundamental na geometria projetiva não foi reconhecido até aproximadamente dezesseis séculos depois. Este teorema pode ser enunciado de várias maneiras, uma das quais é como segue abaixo.

► **Teorema 4.5** – Se A, C e E são três pontos sobre uma reta e B, D e F são três pontos em outra e se as três retas AB, CD e EF cortam as retas DE, FA e BC respectivamente, então os três pontos de interseção, L, M e N são colineares.

Demonstração: Sejam A, C e E três pontos sobre uma reta e B, D e F três pontos em outra reta. Suponhamos que as retas por AB, CD e EF formam um triângulo QRS , como na figura 4.5(a).

Figura 4.5 – Teorema de Pappus



Fonte: Próprio autor, 2024

Aplicando o teorema de Menelaus (§4.1) as cinco ternas de pontos colineares DLE , AMF , BNC , ACE e BFD nos lados do ΔQRS obtemos

$$\frac{\overline{RL}}{\overline{LS}} \frac{\overline{SD}}{\overline{DQ}} \frac{\overline{QE}}{\overline{ER}} = -1, \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{AS}} \frac{\overline{SM}}{\overline{MQ}} \frac{\overline{QF}}{\overline{FR}} = -1, \quad \frac{\overline{RB}}{\overline{BS}} \frac{\overline{SC}}{\overline{CQ}} \frac{\overline{QN}}{\overline{NB}} = -1$$

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{AS}} \frac{\overline{SC}}{\overline{CQ}} \frac{\overline{QE}}{\overline{ER}} = -1, \quad \frac{\overline{RB}}{\overline{BS}} \frac{\overline{SD}}{\overline{DQ}} \frac{\overline{QF}}{\overline{FR}} = -1$$

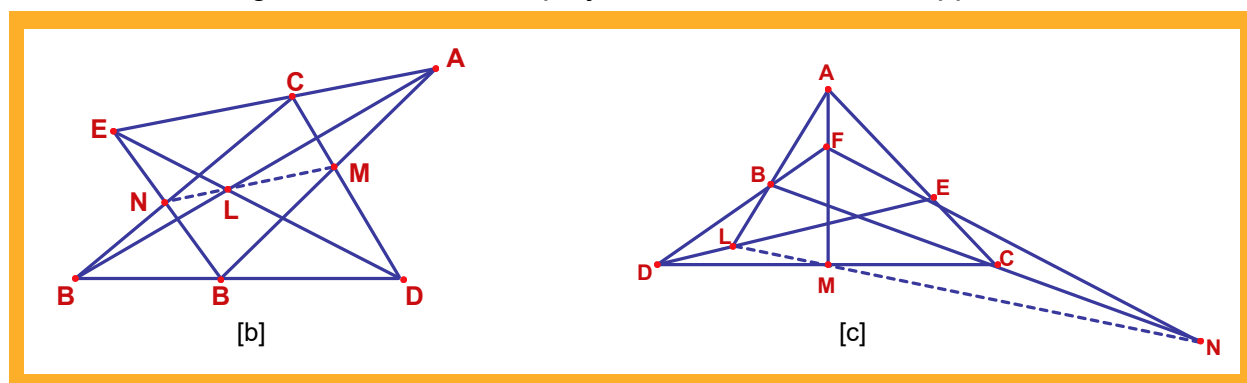
dividindo o produto das três primeiras expressões pelo produto das duas últimas e efetuando todos os cancelamentos possíveis, chegamos ao resultado

$$\frac{\overline{RL}}{\overline{LS}} \frac{\overline{SM}}{\overline{MQ}} \frac{\overline{QN}}{\overline{NR}} = -1,$$

consequentemente, pelo teorema de Menelaus temos que L , M e N são colineares. $\square$

A natureza “projetiva” deste teorema é observada no fato de que ele é um teorema de incidência pura, sem medição de comprimentos ou ângulos, e nem qualquer referência a ordem: em cada conjunto de três pontos colineares é irrelevante qual deles está entre os outros dois. A figura 4.5(b) retrata uma forma de desenhar o diagrama, no entanto, a figura 4.5(c) é outra forma, tão relevante quanto à primeira.

Figura 4.5 – Natureza projetiva do Teorema de Pappus



Fonte: Próprio autor, 2024

Nós podemos permutar ciclicamente as letras A, B, C, D, E, F sempre que L, M e N sejam renomeados adequadamente. Isso para que se evite consideração de pontos no infinito, o qual nos levaria a avançar muito na direção da geometria projetiva.



Pappus de Alexandria

4.6 – Teorema de Pascal

Blaise Pascal (1623– 1662) conheceu as ideias de Desargues aos quatorze anos e apenas dois anos depois, em 1640, com então dezesseis anos de idade e inspirado nas idéias de Desargues, publicou um *Essay* que continha a proposição que ele mesmo intitulou *mysterium hexagrammicum* que posteriormente veio a se chamar de teorema de Pascal.

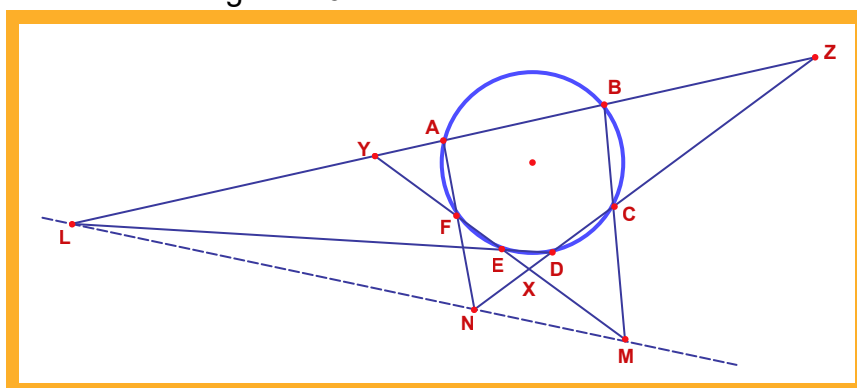
Dizem que a prova original deste teorema foi perdida, porém antes disto acontecer G.W. Leibniz viu uma cópia manuscrita e as anotações que ele fez é tudo o que resta. Tentar reconstruir a então prova perdida usando apenas os resultados e métodos daquela época sempre foi um grande desafio.

► **Teorema de Pascal** – Se todos os seis vértices de um hexágono estão em um círculo e os três pares de lados opostos se intersectam dois a dois, então os três pontos de interseção são colineares.

Demonstração: Seja $ABCDEF$ um hexágono qualquer inscrito em um círculo. E sejam L , M e N os pontos de interseção dos pares de lados opostos de $ABCDEF$, e XYZ o triângulo formado pelas retas AB , CD e EF (figura 4.6). Vamos provar que, L , M e N são colineares. Aplicando o teorema de Menelaus (§ 4.1) para as três tríades de pontos LDE , FAN e BCM nas retas pelos lados do $\triangle XYZ$ obtemos

$$\frac{\overline{YL}}{\overline{LZ}} \frac{\overline{ZD}}{\overline{DX}} \frac{\overline{XE}}{\overline{EY}} = -1, \quad \frac{\overline{YA}}{\overline{AZ}} \frac{\overline{ZN}}{\overline{NX}} \frac{\overline{XF}}{\overline{FY}} = -1, \quad \frac{\overline{YB}}{\overline{BZ}} \frac{\overline{ZC}}{\overline{CX}} \frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = -1$$

Figura 4.6 – Teorema de Pascal



Fonte: Próprio autor, 2024

Multiplicando todas as três expressões, temos

$$(5) \quad \frac{\overline{YL}}{\overline{LZ}} \frac{\overline{ZD}}{\overline{DX}} \frac{\overline{XE}}{\overline{EY}} \cdot \frac{\overline{YA}}{\overline{AZ}} \frac{\overline{ZN}}{\overline{NX}} \frac{\overline{XF}}{\overline{FY}} \cdot \frac{\overline{YB}}{\overline{BZ}} \frac{\overline{ZC}}{\overline{CX}} \frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = -1$$

$$(6) \quad \frac{\overline{ZD}}{\overline{DX}} \frac{\overline{XE}}{\overline{EY}} \frac{\overline{YA}}{\overline{AZ}} \frac{\overline{XF}}{\overline{FY}} \frac{\overline{YB}}{\overline{BZ}} \frac{\overline{ZC}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{XE.XF}}{\overline{XC.XD}} \frac{\overline{YA.YB}}{\overline{YE.YF}} \frac{\overline{ZC.ZD}}{\overline{ZA.ZB}} = 1$$

Pela Proposição 1.5 em §1.2 segue que $\overline{XE.XF} = \overline{XC.XD}$, $\overline{YA.YB} = \overline{YE.YF}$

$$\overline{ZC.ZD} = \overline{ZA.ZB}, \text{ substituindo (6) em (5), obtemos } \frac{\overline{YL}}{\overline{LZ}} \frac{\overline{ZN}}{\overline{NX}} \frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = -1 \text{ e}$$

De onde segue do Teorema de Menelaus que L, M e N são pontos colineares. A reta que passa por L, M e N é chamada **reta de Pascal** do hexágono dado. $\square$



Blaise Pascal

CAPÍTULO 5

ELEMENTOS DE DEST $\triangle$ QUE DO TRI $\triangle$ NGULO

Num tratamento elementar dos triângulos são apresentados como pontos notáveis o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro do triângulo. Neste capítulo vamos destacar a presença de outros pontos associados ao triângulo, bem como alguns elementos ligados a ele, que começaram a ser descobertos a partir do século XIX e que levam, em sua maioria, o nome de seus descobridores. Devemos restringir nossa atenção a alguns deles, uma vez que este é um assunto amplo e que ainda pode ser propício a novas descobertas.

5.1 – Incentro

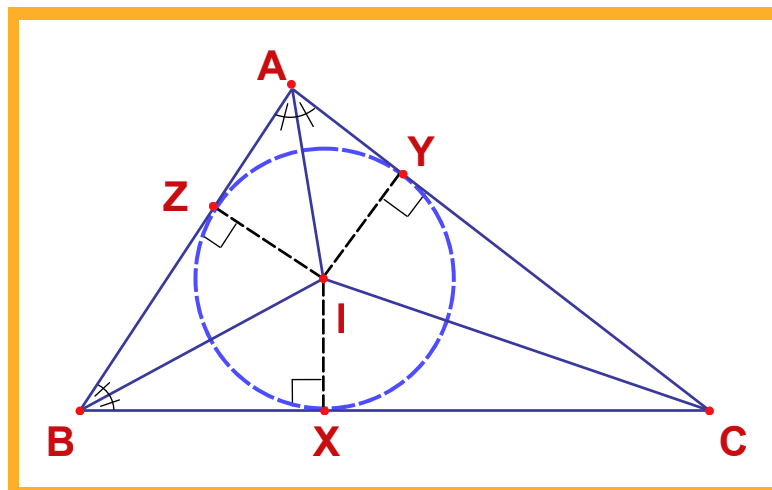


Definição: O ***incentro*** de um triângulo é o ponto de concorrência das três bissetrizes desse triângulo.

O ***incentro*** é o ponto interior ao triângulo cujas distâncias aos lados são iguais. Essa distância comum é o raio da circunferência inscrita ao triângulo.

► **Teorema 5.1** – As três bissetrizes de um triângulo são concorrentes em um ponto I , chamado incentro.

Figura 5.1 - Incentro



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer e I o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do triângulo ABC . Vamos traçar as Perpendiculares IX , IY e IZ por I aos lados BC , CA e AB respectivamente. Como BI é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e é lado comum aos triângulos retângulos $\triangle BXI$ e $\triangle BZI$, segue do critério

de congruência de triângulos retângulos com hipotenusa e ângulo agudo congruentes que os triângulos $\triangle BXI$ e $\triangle BZI$ são congruentes e em consequência $IX \cong IZ$. Com argumento análogo também resulta $IZ \cong IY$. Então o ponto I é equidistante dos três lados do $\triangle ABC$. Segue que, CI é a hipotenusa dos triângulos retângulos CXI e CYI , que também são congruentes, logo os ângulos correspondentes $\widehat{ICY}$, $\widehat{ICX}$ são congruentes, ou seja, CI é a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$. Portanto as três bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ se intersectam em I , sendo, portanto I o incentro do triângulo ABC . $\square$

5.2 – Circuncentro

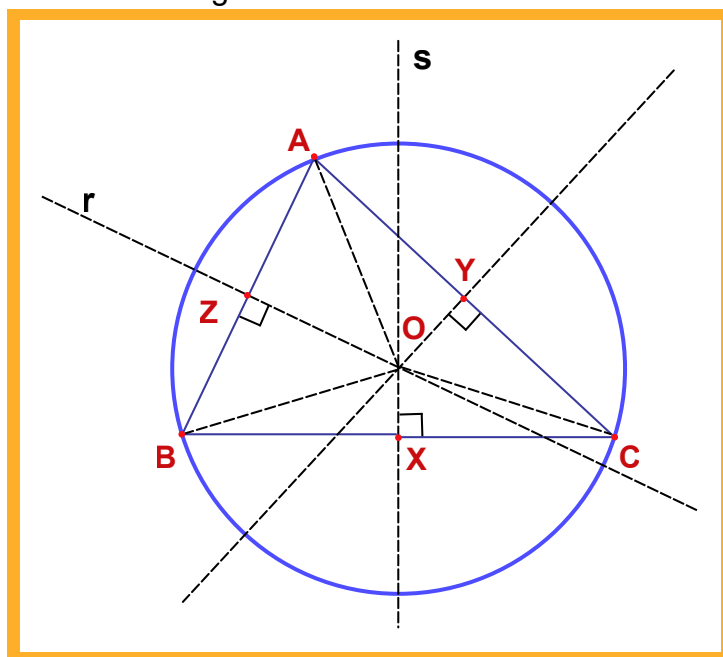


Definição: O *circuncentro* de um triângulo é o ponto de concorrência das mediatrizes dos lados de um triângulo.

O circuncentro é o ponto equidistante aos vértices do triângulo, e a distância do circuncentro a um vértice do triângulo é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

► **Teorema 5.2** – As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um ponto O chamado de circuncentro do triângulo.

Figura 5.2 - Circuncentro



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Sejam ABC um triângulo, r a mediatriz do segmento AB e s a mediatriz do segmento BC . Denotemos por O o ponto de interseção destas duas retas. Observe que todo ponto da reta r é equidistante de A e B , e também todo ponto da reta s é equidistante de B e C . Logo o ponto O é equidistante de A e C , O então também pertence à reta mediatriz do segmento AC e, portanto é ponto de interseção das três mediatrizes do triângulo ABC . Assim, pelo Teorema 1.2, existe uma circunferência de centro O e raio $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, que é a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . $\square$

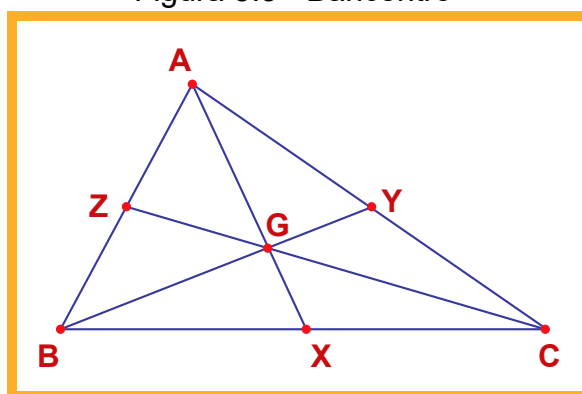
5.3 – Baricentro



Definição: O **baricentro** de um triângulo é o ponto de concorrência das medianas desse triângulo.

► **Teorema 5.3** – As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto G chamado de baricentro e o ponto G divide cada uma das três medianas na razão 2:1 a partir dos vértices.

Figura 5.3 - Baricentro



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Seja o triângulo ABC , com X , Y e Z pontos médios dos lados e AB respectivamente. Sabemos que as áreas de triângulos com alturas iguais são

proporcionais às bases dos triângulos, ou seja, $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\text{área}\Delta ABX}{\text{área}\Delta AXC}$, mas como

X é ponto médio do segmento BC segue que $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 1$. Analogamente $\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$ e

$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$, consequentemente, o produto $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$ e pelo Teorema de Ceva (§4.2) as cevianas AX , BY e CZ são concorrentes. Como as medianas são cevianas segue que as medianas do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes em um ponto G . Para demonstrar a segunda parte do teorema vamos tomar a base média ZY . Pelo Teorema 1.1 temos que $\overline{ZY} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ e $ZY \parallel BC \Rightarrow G\hat{B}C \cong G\hat{Y}Z$ e $G\hat{Z}Y \cong G\hat{C}B$. Logo, pelo Teorema 3.2(ii) os triângulos GZY e GCB são semelhantes e como $\overline{ZY} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$. Portanto $\overline{GY} = \frac{1}{2}\overline{GB}$ e $\overline{GZ} = \frac{1}{2}\overline{GC}$. Com raciocínio semelhante encontramos que $\overline{GX} = \frac{1}{2}\overline{GA}$, o que completa a demonstração. $\square$

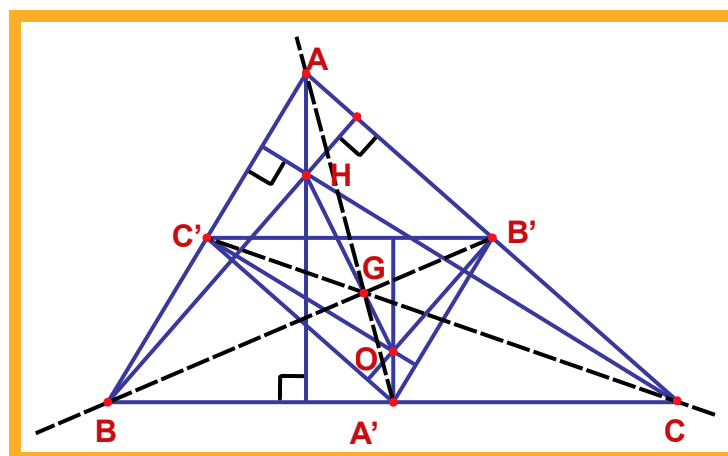
5.4 – Ortocentro



Definição: O **ortocentro** de um triângulo é o ponto de concorrência das três alturas desse triângulo.

► **Teorema 5.4** – As três alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto H chamado de ortocentro do triângulo.

Figura 5.4 - Ortocentro



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Demonstraremos este teorema de uma forma não tão convencional a que vínhamos fazendo. Dado o triângulo ABC a altura traçada por A

é perpendicular ao lado BC (veja a figura 5.4). A altura do triângulo ABC mede o dobro da altura do triângulo $A'B'C'$, onde este é o triângulo médio (seção 2.1). O mais interessante neste fato é que a altura traçada por A' é mediatriz do lado BC . Analogamente a altura traçada por B' e C' são mediatrizes dos lados AC e AB , respectivamente. Consequentemente, as alturas do triângulo médio $A'B'C'$ são concorrentes em um ponto O (Teorema 5.2). Sejam AA' , BB' e CC' as medianas do $\triangle ABC$ concorrentes no ponto G , baricentro do triângulo $\triangle ABC$, pelo Teorema 5.3. Usando a definição da seção 2.2, o triângulo ABC é o triângulo anticomplementar do triângulo $A'B'C'$. Seja a homotetia de centro G e razão -2 , logo, da definição de isometria em §3.2, segue $H_{G,-2}(O) = H$. Então, H é um ponto em cada altura do $\triangle ABC$. Em outras palavras, as alturas do triângulo ABC são concorrentes no ponto H , chamado de ortocentro do triângulo ABC . $\square$

5.5 – Reta de Euler

O nome Euler aparece muito frequentemente e em tantas áreas da matemática que algumas palavras sobre ele devem ser pronunciadas em ordem. Leonhard Euler nasceu em 1707 em Basel na Suíça. Em 1727 ele foi convidado para a Academia de St. Petersburg na Rússia. Em 1741 ele partiu para Berlim para tomar a cadeira em matemática na Academia prussiana. Ele retornou para St. Petersburg em 1766, e permaneceu lá até a sua morte em 1783. Euler era um trabalhador incansável. Suas atividades enriqueceram todos os campos da matemática, onde quer que se olhe existe um teorema de Euler, uma fórmula de Euler ou método de Euler. Euler escreveu 473 memórias que foram publicadas durante sua vida. Além disso, ele fez isso mesmo com um grave impedimento, que foi perder a visão de um olho em 1735, e a visão do outro em 1766. Sua habilidade em manipulação era notável, e seu discernimento intuitivo matemático enorme. Faremos referência a esse importante matemático em alguns dos próximos pontos.

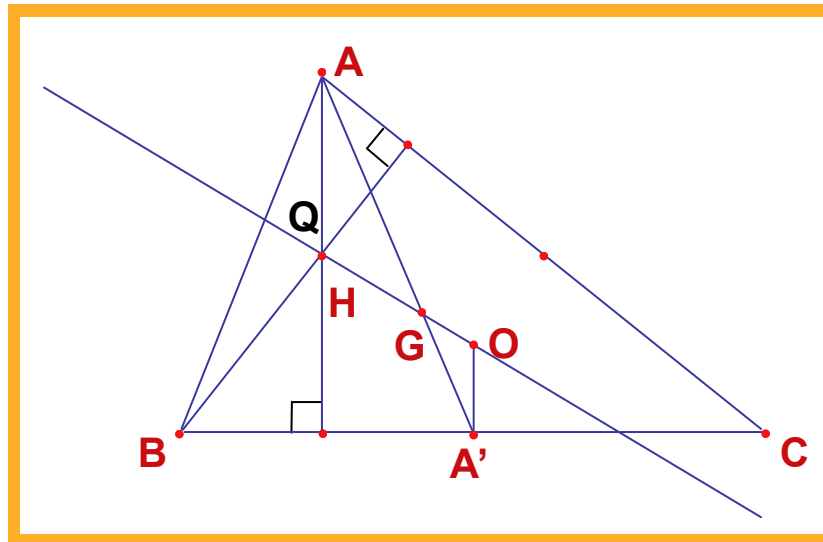


Definição: A reta contendo o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo não equilátero é chamada **reta de Euler** do triângulo.

É importante observar que no caso de o triângulo ser equilátero, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro coincidem.

► **Teorema 5.5** – O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo não equilátero são colineares, e a distância do baricentro para o ortocentro é igual a duas vezes a distância do baricentro para o circuncentro.

Figura 5.5 – Reta de Euler



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer não equilátero, e sejam O , G , H o circuncentro, o baricentro e o ortocentro do triângulo dado, respectivamente. Seja Q o ponto de intersecção da reta por OG e da altura relativa ao vértice A (figura 5.5). Seja A' o ponto médio do lado BC , os dois triângulos AGQ e $A'GO$ são semelhantes (Teorema 3.2 (ii) e 5.3 aplicado a mediana AA'), consequentemente temos

$$(1) \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GA'}} = \frac{\overline{GQ}}{\overline{OG}} = \frac{2}{1}$$

Situação semelhante terá ao tomar outra altura do triângulo, por exemplo, relativa ao vértice B , o ponto de intersecção seria o mesmo ponto Q , o que nos levaria a uma equação análoga a (1), em consequência segue que

$$(2) \quad \overline{GQ} = 2\overline{OG}$$

Em outras palavras, o ponto Q coincide com o ortocentro H do triângulo ABC e por (2) temos que $\overline{GH} = 2\overline{GO}$. E, além disso, $\overline{AH} = 2\overline{OA'}$. Portanto O , G e H estão na mesma reta chamada **reta de Euler**. □

Considere aqui a possibilidade de ter uma nova prova para a concorrência das alturas de um triângulo. □

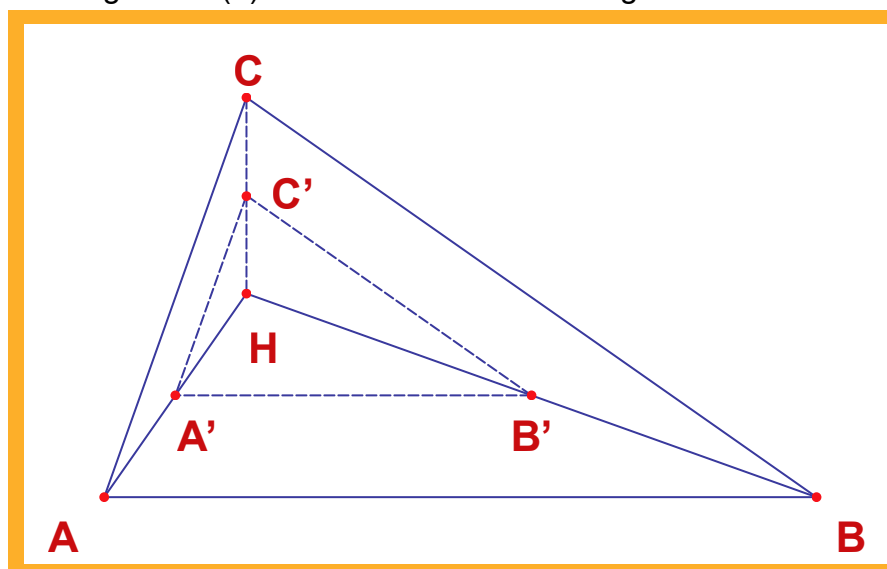
5.6 – Ponto de Euler e triângulo de Euler



Definição: O ponto médio entre o ortocentro e um dos vértices de um triângulo é chamado de **ponto de Euler** do triângulo dado.

O triângulo que tem os três pontos de Euler como vértices é chamado de triângulo de Euler. Na figura 5.6(a) o triângulo $\triangle A'B'C'$ é o triângulo de Euler, com A' , B' e C' pontos de Euler.

Figura 5.6(a) – Pontos de Euler e triângulo de Euler



Fonte: Próprio autor, 2024

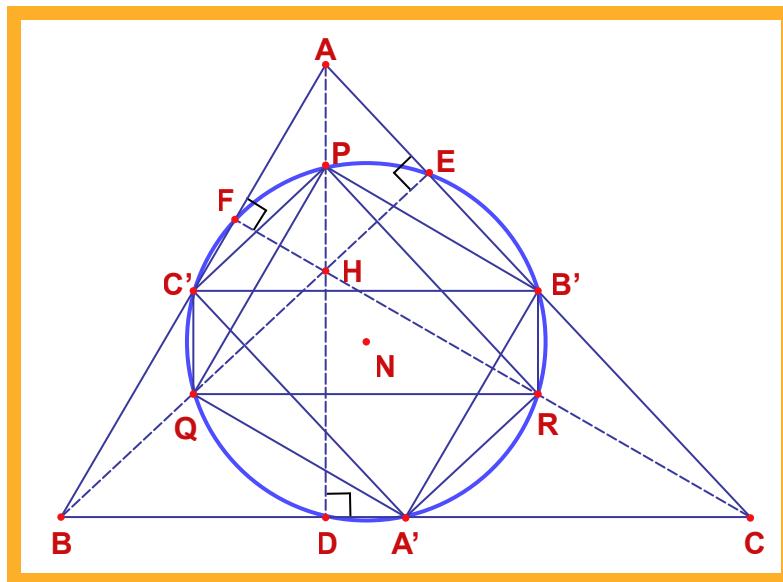
Em 1765 Euler mostrou que o círculo circunscrito ao triângulo órtico coincide como círculo circunscrito ao triângulo médio (tendo aqui seis dos pontos do círculo de nove pontos). Mas foi somente entre os anos de 1820 e 1821 que os geômetras franceses Charles-Julian Brianchon (1785-1864) e Jean-Victor Poncelet (1788-1867) publicaram juntos em um jornal de articulação, que o círculo circunscrito ao triângulo de Euler coincidia com os outros dois círculos, completando o círculo de nove pontos. □



Teorema 5.6 – Em um triângulo os pontos médios dos lados, os pés das alturas, e os pontos de Euler estão no mesmo círculo.

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer e A' , B' , C' pontos médios dos lados BC , AC , AB , respectivamente, P , Q e R pontos de Euler e H ortocentro do triângulo dado. Analisando os triângulos ABC e HBC (figura 5.6b) temos que o lado BC é comum a ambos e, além disso, $B'C'$ é base média do $\triangle ABC$ e QR base média do $\triangle HBC$, conseqüentemente, BC é paralela a $B'C'$ e a QR . Analogamente, tomamos os triângulos AHC e AHB , com AH lado comum aos dois, $B'R$ base média do $\triangle AHC$ e $C'Q$ base média do $\triangle AHB$, portanto $B'R$ e $C'Q$ são paralelas a AH e também $B'R \parallel C'Q$, e como AH é perpendicular a BC , segue então que $B'C'QR$ é um retângulo. $\square$

Figura 5.6(b) – Círculo dos nove pontos



Fonte: Próprio autor, 2024

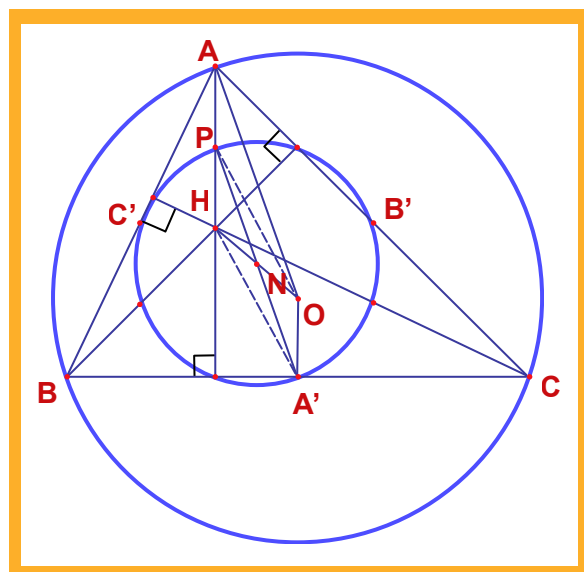
Com argumentos semelhantes temos que $A'B'PQ$ e $C'A'RP$ são retângulos com vértices no círculo. Portanto $A'P$, $B'Q$, $C'R$ são diâmetros de um círculo. Segue que $B'Q$ e $C'R$ são congruentes e se intersectam digamos em um ponto N . Da mesma maneira, temos que $A'P$ é igual a $B'Q$ e tem N como ponto médio. Deste modo N é o centro do círculo que passa pelos pontos A' , B' , C' , P , Q , R . Pela Proposição 1.3, $\angle A'EP$ é o ângulo inscrito no círculo e mede metade do ângulo central $\angle A'NP$ logo o ponto E , pé da altura do triângulo ABC relativa ao vértice B , pertence também ao círculo. Concluímos, com raciocínio análogo que os outros pés das alturas do $\triangle ABC$, D e F pertencem também ao círculo. Este círculo é chamado de *círculo dos nove pontos*. $\square$



Definição: O círculo que passa pelos pontos médios dos lados, pelos pés das alturas e pelos pontos de Euler de um triângulo é chamado *círculo dos nove pontos*.

► **Teorema 5.7** – O centro do círculo de nove pontos de um triângulo não eqüilátero está na reta de Euler desse triângulo, e é o ponto médio entre o circuncentro e o ortocentro do triângulo.

Figura 5.6 (c) – Representação geométrica do Teorema 5.7



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Sejam ABC um triângulo não equilátero qualquer, O o circuncentro e H o ortocentro do triângulo dado. E seja ainda $A'B'C'$ o triângulo médio do ΔABC , segue que AH e OA' , altura e mediatriz correspondentes a BC , respectivamente, são paralelas e pelo teorema 5.5

temos que $\overline{OA'} = \frac{1}{2} \overline{AH} = \overline{AP} = \overline{PH}$ onde P é ponto médio de AH .

Consequentemente $APA'O$ e $PHA'O$ são paralelogramos. No paralelogramo $APA'O$ temos que $PA' \cong AO$, isto é, o diâmetro do círculo de nove pontos é igual ao raio AO do círculo circunscrito ao ΔABC , e no segundo paralelogramo $PHA'O$ a diagonal HO passa pelo ponto médio N da diagonal PA' , logo temos que N é ponto médio entre o circuncentro O e o ortocentro H . Para completar a prova, como H, N, O são colineares e pela definição de reta de Euler, segue que N está na reta de Euler do triângulo ABC . $\square$

A história desses dois teoremas que acabamos de demonstrar é um pouco confusa, em geral não levam nem o nome de Brianchon nem o de Poncelet, mas são sempre relacionados ao matemático alemão Karl Feuerbach que trabalhando independentemente os publicou em 1822.



Leonhard Euler

5.7 – Pontos de Feuerbach

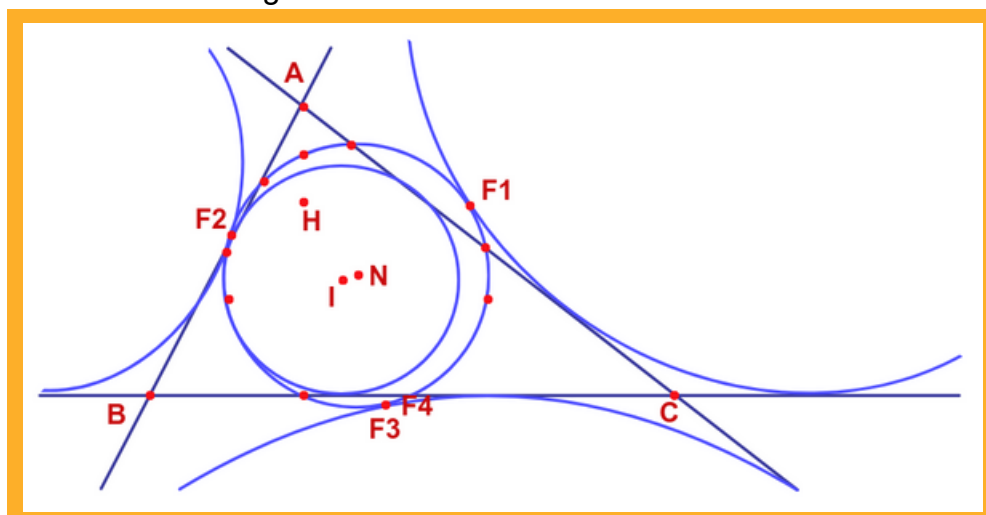
O nome usado para o círculo de nove pontos pelos matemáticos de língua inglesa vem do círculo de nove pontos do Teorema de Brianchon e Poncelet. Muitos matemáticos franceses chamam a este círculo de círculo de Euler e os alemães se referem a ele como círculo de Feuerbach. Em um ato impensável Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) ameaçou decapitar com uma espada seus alunos que não conseguiam resolver a equação que deixara na sala da diretoria. Este ato insano para a falsa ordem a respeito das atividades universitárias teve o seu custo. Aliviado do seu dever de lecionar, o jovem professor se viu sem sentido e fora da realidade acabou com a própria vida. Porém, em um pequeno livro publicado em 1822 contendo resultados bem fascinantes, Feuerbach deixou ao mundo o legado frequentemente considerado como os mais famosos teoremas do triângulo descobertos desde a queda de Alexandria no ano de 641, e entre estes está o teorema de Feuerbach “o mais belo teorema de geometria elementar descoberto desde o tempo de Euclides”, segundo o geômetra americano Coolidge. Devido ao encanto desses teoremas, durante todo o século dezenove, maciços estudos foram realizados a respeito da geometria do triângulo e do círculo.



Definição: Os **pontos de Feuerbach** de um triângulo são os pontos de tangência do círculo inscrito e dos três círculos excritos ao triângulo dado com o círculo de nove pontos.

Na figura 5.7, F_1, F_2, F_3 e F_4 são os pontos de Feuerbach do triângulo ABC .

Figura 5.7 – Pontos de Feuerbach

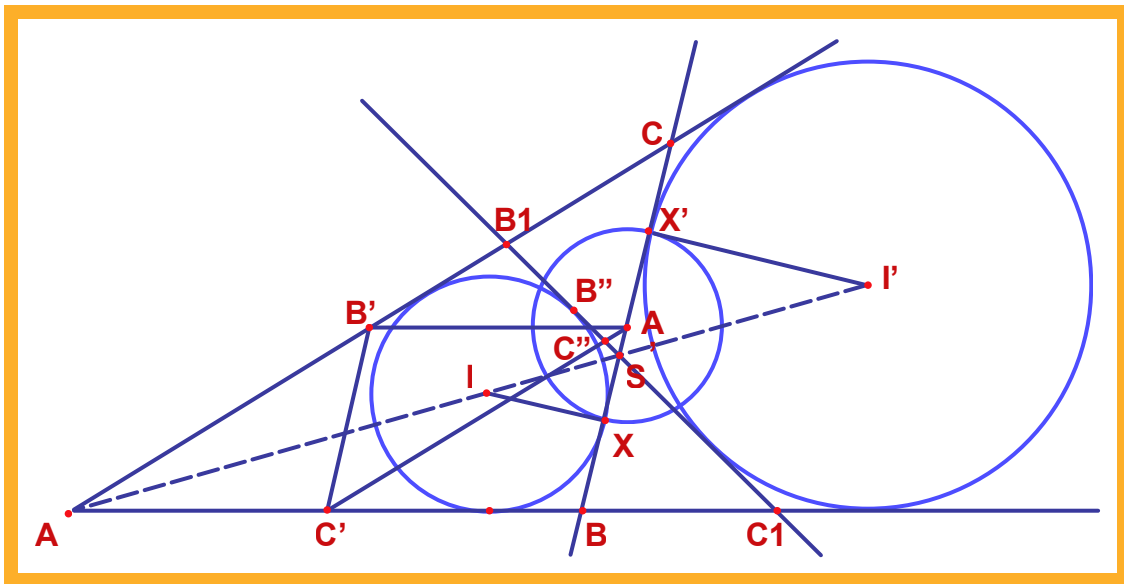


Fonte: Próprio autor, 2024

► **Teorema de Feuerbach** – O círculo de nove pontos de qualquer triângulo é tangente internamente ao círculo inscrito e tangente externamente aos três círculos excritos.

Demonstração: Sejam $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, $\triangle A'B'C'$ seu triângulo médio, X ponto de tangência do círculo α inscrito no $\triangle ABC$ com o lado BC , X' ponto de tangência do círculo β excrito ao $\triangle ABC$ no lado BC e a reta por XX' uma tangente comum aos dois círculos. Estes círculos tocam todos os lados ou os prolongamentos dos lados do $\triangle ABC$. Seja B_1C_1 a outra tangente comum aos dois círculos α e β . B_1C_1 tem pontos de interseção S , B'' e A'' com BC , $A'B'$ e $A'C'$ respectivamente.

Figura 5.7(a) – Representação geométrica do Teorema de Feuerbach



Fonte: Próprio autor, 2024

O semi-perímetro do $\triangle ABC$ é $s = \frac{a+b+c}{2}$, onde $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ levando em conta as hipóteses sobre X e A' , onde $XA' \cong A'X'$, pelo Teorema 1.6, segue que

$$(3) \quad \overline{BX} = \overline{X'C} = s - b,$$

de onde resulta que A' é o centro de um círculo ω que tem diâmetro XX' dado por

$$(4) \quad \overline{XX'} = \overline{BC} - (\overline{BX} + \overline{X'C})$$

substituindo $\overline{BC} = a$ e a equação (3) na (4) obtemos $\overline{XX'} = a - 2(s - b) = b - c$ (que estamos assumindo ser positivo, caso contrário devemos renomear A , B e C em outra ordem). O círculo de nove pontos passa pelo centro A' de ω , consequentemente pelo Teorema 3.4 ω o inverte em uma reta. Nós devemos mostrar que esta reta vai por B'' e C'' (e então por B_1 e C_1) o que prova que B'' e C'' são os inversos em ω dos pontos B' e C' do círculo de nove pontos. Como I e I_1 estão na bissetriz do ângulo A , o Teorema 1.5 da bissetriz mostra que o ponto S divide o segmento BC na razão $b : c$, de forma que nós temos

$$(5) \quad \frac{\overline{CS}}{\overline{SB}} = \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac} = \frac{\frac{ab}{b+c}}{\frac{ac}{b+c}} \Rightarrow \overline{CS} = \frac{ab}{b+c} \text{ e } \overline{SB} = \frac{ac}{b+c}$$

mas

$$\overline{CS} = \overline{SA'} + \overline{CA'} \Rightarrow \overline{CS} = \overline{SA'} + \overline{BA'} \Rightarrow \overline{CS} - \overline{SB} = \overline{SA'} + \overline{BA'} - (\overline{BA'} - \overline{SA'}) = 2\overline{SA'}$$

logo

$$(6) \quad \overline{SA'} = \frac{\overline{CS} - \overline{SB}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{b+c} - \frac{ac}{b+c} \right) \Rightarrow \overline{SA'} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

Também $\overline{BC_1} = \overline{AC_1} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AB} = b - c$ e analogamente $\overline{CB_1} = b - c$.

Os triângulos $SA'B''$ e SBC_1 são semelhantes (Teorema 3.2 ii) da mesma forma para

os triângulos $SA'C''$ e SCB_1 , em consequência dessas congruências e com as igualdades (5) e (6) que já obtemos, segue

$$(7) \quad \frac{\overline{A'B''}}{b-c} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SB}} = \frac{\frac{a(b-c)}{2(b+c)}}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b-c}{2c} \Rightarrow \overline{A'B''} = \frac{(b-c)^2}{2c}$$

e

$$(8) \quad \frac{\overline{A'C''}}{b-c} = \frac{\overline{A'C''}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SC}} = \frac{\frac{a(b-c)}{2(b+c)}}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b-c}{2b} \Rightarrow \overline{A'C''} = \frac{(b-c)^2}{2b}$$

Sabendo que as bases médias do $\triangle ABC$ são $\overline{A'B'} = \frac{c}{2}$ e $\overline{A'C'} = \frac{b}{2}$, e

utilizando as equações (7) e (8) obtemos

$$\overline{A'B'} \cdot \overline{A'B''} = \frac{c}{2} \frac{(b-c)^2}{2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad \overline{A'C'} \cdot \overline{A'C''} = \frac{b}{2} \frac{(b-c)^2}{2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

Deste modo, o círculo ω de raio $\frac{b-c}{2}$ inverte B' em B'' e C' em C'' (§ 3.5).

A reta r por BC é tangente em X ao círculo inscrito no triângulo ABC e contém o diâmetro XX' de ω , segue pelo Teorema 3.3, que α e ω são círculos ortogonais. Também a reta r é tangente em X' ao círculo β , portanto ω e β são círculos ortogonais. O círculo ω é ortogonal ao círculo α inscrito no $\triangle ABC$ e ao círculo β excrito ao triângulo no lado BC . A inversão ω deixa ambos estes círculos invariantes pelo Teorema 3.7. De fato, ω inverte o círculo α inscrito e o círculo β excrito ao $\triangle ABC$

neles mesmos e seu tangente comum B_1C_1 no círculo de nove pontos. Consequentemente o círculo de nove pontos, como a reta, toca em ambos, e similarmente toca os outros dois círculos tangentes externos ao $\triangle ABC$. A demonstração deste último caso usa as mesmas ferramentas que usamos no primeiro e está desenvolvida (Pedoe, 1957, p 9).



Karl Wilhelm von Feuerbach

5.8 – Ponto de Gergonne

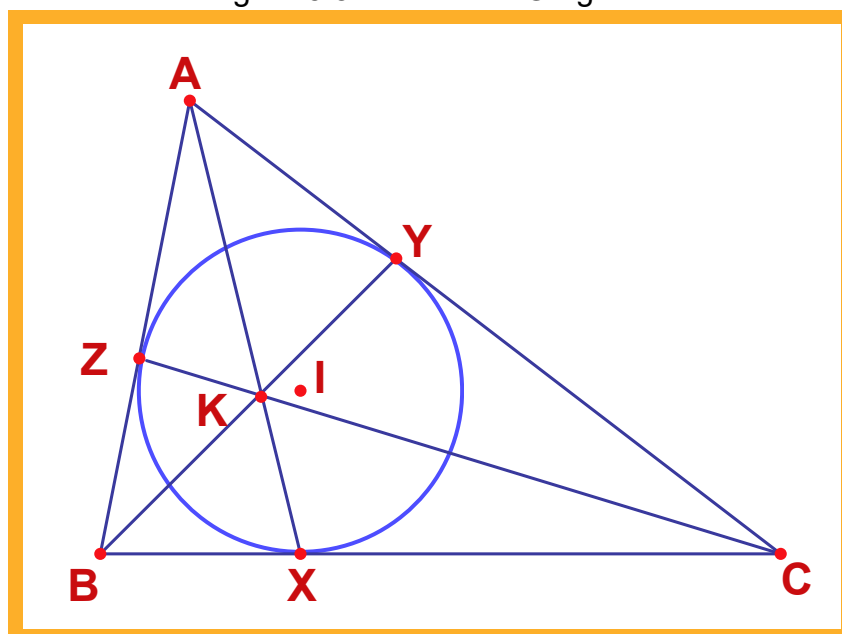
O geômetra Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859) defendeu os métodos da geometria analítica e foi o editor fundador do jornal matemático ***Annales de Mathématiques***. O ponto que leva o seu nome é o ponto de concorrência do qual se refere o próximo teorema.



Definição: O **ponto de Gergonne** é o ponto de interseção das cevianas AX , BY e CZ do triângulo ABC , onde X , Y e Z são os pontos de tangência dos lados do triângulo com o círculo inscrito ao triângulo ABC .

► **Teorema 5.8** – As três cevianas traçadas dos vértices de um triângulo para os correspondentes pontos de tangência com o círculo inscrito são concorrentes no ponto K chamado ponto de *Gergonne*.

Figura 5.8 – Ponto de Gergonne



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer e AX , BY , CZ três cevianas (figura 5.8). Pela Proposição 1.4 temos que $\overline{AZ} = \overline{AY}$. Semelhantemente para o ponto B , $\overline{BX} = \overline{BZ}$ e para o ponto C , $\overline{CY} = \overline{CX}$. Multiplicando as três igualdades

obtemos $\overline{AZ}.\overline{BX}.\overline{CY} = \overline{AY}.\overline{BZ}.\overline{CX}$ ou seja, $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}.\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}.\frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1$ então pelo Teorema de Ceva (§4.2) AX , BY e CZ são concorrentes no ponto K chamado de ponto de Gergonne. $\square$



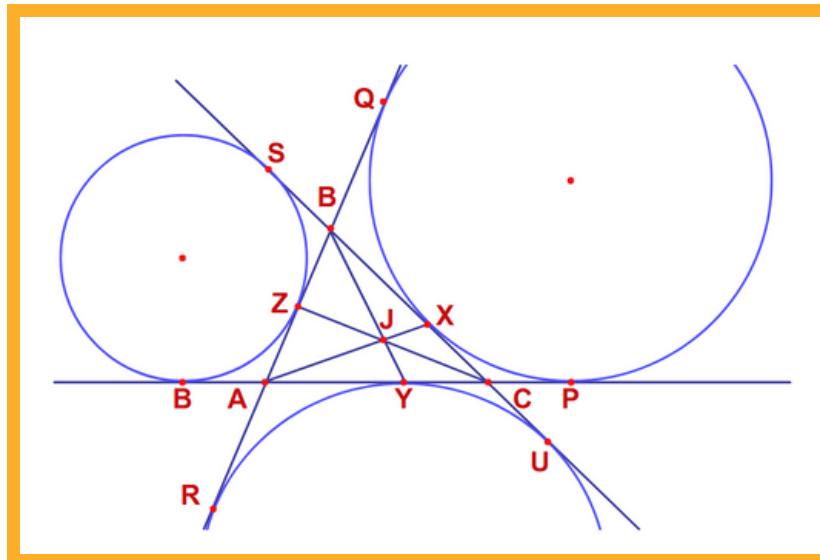
Joseph-Diaz Gergonne

5.9 – Ponto de Nagel

O próximo teorema foi publicado em 1836 pelo geômetra e educador alemão Christian Heinrich Nagel (1803-1882). O ponto de Nagel desempenha um papel importante na geometria do triângulo, sendo estudado em contextos teóricos e práticos devido às suas relações com outras figuras geométricas e pontos notáveis.

► **Teorema 5.9** – As cevianas traçadas do vértice de um triângulo para os correspondentes pontos de tangência aos círculos excritos ao triângulo nos lados opostos são concorrentes em um ponto J chamado de **ponto de Nagel**.

Figura 5.9 – Ponto de Nagel



Fonte: Próprio autor, 2024

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer, s o seu semi-perímetro, com $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e P, Q, R, S, T, U , pontos de pontos de tangência dos três círculos excritos com os prolongamentos dos lados do $\triangle ABC$ (figura 5.9). Utilizando a Proposição 1.4 temos que $\overline{AP} = \overline{AQ}$, $\overline{CS} = \overline{CT}$ e $\overline{BR} = \overline{BU}$ e pelo Teorema 1.6 obtemos

$$\overline{AZ} = \overline{CX} = s - b$$

$$\overline{BX} = \overline{AY} = s - c$$

$$\overline{CY} = \overline{BZ} = s - a$$

multiplicando as três igualdades acima, segue que $\overline{AZ}, \overline{BX}, \overline{CY} = \overline{CX}, \overline{AY}, \overline{BZ}$ e

portanto $\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$. Logo, pelo Teorema de Ceva as cevianas AX, BY, CZ

são concorrentes no ponto J . $\square$



Christian Heinrich von Nagel

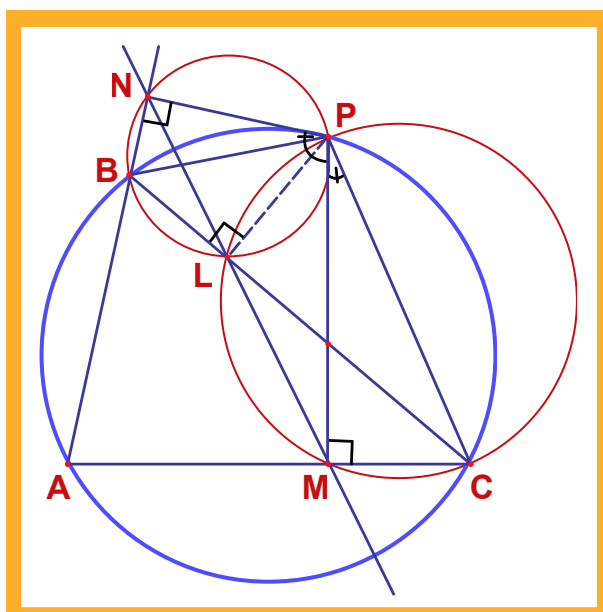
5.10 – Reta de Simson

Robert Simson (1687-1768) foi um brilhante matemático escocês que durante cinquenta anos ocupou a cadeira de matemática na Universidade de Glasgow. Simson deu várias contribuições para a geometria e para a aritmética. Foi ele quem descobriu que, se f_n é o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci, então $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$. Ele restaurou algumas obras perdidas de Euclides como os *Porismas* e atingiu sua excelência na edição dos *Elementos de Euclides*, trabalhou também reconstruindo obras de Apolônio como, por exemplo, *Secções Determinadas*, tudo isso com o intuito de resgatar a antiga geometria grega. Seu nome é lembrado no teorema abaixo descoberto por Willian Wallace em 1797.

► **Teorema 5.10** – Os pés das perpendiculares de um ponto P para os lados de um triângulo são colineares se e somente se o ponto P está no círculo circunscrito ao triângulo.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer e P um ponto sobre o círculo circunscrito ao $\triangle ABC$. E sejam L , M e N os pés das perpendiculares passando por P aos lados BC , AC e AB respectivamente, ou aos prolongamentos dos lados (figura 5.10). Pela Proposição 1.6 para o quadrilátero $ABPC$, com vértices no círculo circunscrito ao $\triangle ABC$, temos que

Figura 5.10 – Representação geométrica do teorema 5.10



Fonte: Próprio autor, 2024

$$(9) \quad \hat{BAC} + \hat{CPM} + \hat{MPB} = 180^\circ$$

olhando agora para o quadrilátero $ANPM$ e aplicando a Proposição 1.4 temos que

$$(10) \quad \hat{BAC} + \hat{NPB} + \hat{MPB} = 180^\circ$$

Das equações (9) e (10) segue que

$$(11) \quad \hat{CPM} = \hat{NPB}$$

Usando o Teorema 1.2 existe um círculo que passa por P , L , C e além disso $\triangle PLC$ é retângulo em L , e PC é um dos diâmetros deste círculo. Por outro lado PC é hipotenusa do $\triangle CMP$, logo este círculo passa por M , em consequência

$$(12) \quad \hat{CLM} = \hat{CPM}$$

Analogamente, para o círculo com um diâmetro PB

$$(13) \quad \hat{BLN} = \hat{NPB}$$

Logo por (11), (12) e (13)

$$(14) \quad \hat{BLN} = \hat{CLM}$$

deste modo L , M e N são colineares.

Reciprocamente, se L , M , N são colineares então é válida a igualdade (14) e pelas igualdades (12) e (13) nós temos a (11). Portanto $\hat{NPM} = \hat{BPC}$, então $\hat{NPM}$ é o ângulo suplementar a $\hat{BAC}$. Deste modo P está no círculo circunscrito ao triângulo ABC . $\square$

Robert Simson

CAPÍTULO 6

COORDENADAS

TRILINEARES

As coordenadas trilineares foram consideradas um grande avanço da geometria em direção à aritmetização. Em 1829 Plücker rompeu com o conceito cartesiano de coordenadas como segmentos de reta ao publicar um artigo inovador no *Jornal de Crelle*. Plücker, na verdade, tomou especificamente três coordenadas α , β e γ de um ponto P de um plano como sendo as três distâncias de P aos lados de um triângulo de referência. Mais tarde no volume II de *Analytisch-geometrische Entwicklungen* ele deu a definição mais usual de coordenadas homogêneas trilineares.

Se P é um ponto no plano definido pelo triângulo ABC , então sua posição é completamente determinada pelas relações das distâncias de P para os lados do $\triangle ABC$. Essas distâncias podem então servir como coordenadas para P .



Definição: Qualquer tripla ordenada (α, β, γ) de números respectivamente proporcionais à distância de P para os lados de um triângulo é chamada de coordenadas *homogêneas trilineares* ou simplesmente *trilineares*.

As coordenadas trilineares são úteis na geometria para descrever a posição de pontos em relação aos lados de um triângulo de uma maneira padronizada e sistemática. Elas são especialmente úteis em problemas de geometria analítica e em teoremas que envolvem relações proporcionais entre os lados e ângulos de um triângulo. Além disso, as coordenadas trilineares são essenciais para a formulação de muitos teoremas e fórmulas na geometria do triângulo, incluindo o Teorema de Ceva, Teorema de Menelaus e muitos outros resultados importantes que envolvem proporções e relações entre segmentos e pontos dentro do triângulo. Portanto, as coordenadas trilineares são uma ferramenta poderosa e versátil na geometria, facilitando análises geométricas e cálculos que não seriam tão diretos usando outras abordagens ou métodos puramente geométricos. Iniciaremos por utilizá-la para escrever os principais pontos de destaque do triângulo já mencionados anteriormente e seguir os estudos em busca de outros pontos de destaques do triângulo e compreender melhor como essas coordenadas funcionam.

Dado um ponto P no plano do triângulo ABC , as coordenadas trilineares de P são a tripla ordenada (α, β, γ) , onde α é a distância de P ao lado BC , β ao lado AC e γ ao lado AB . As coordenadas trilineares do ponto P são únicas a menos de uma constante de multiplicação, ou seja, se (α, β, γ) são as coordenadas de P também o é $(k\alpha, k\beta, k\gamma)$ com $k \neq 0$. Com respeito ao sinal de α, β, γ designaremos α positivo quando P estiver no mesmo semiplano que A em relação ao lado BC e negativo no caso contrário, analogamente para P e B em relação ao lado AC e para P e C em relação ao lado AB . Vale ressaltar que α, β e γ são as distâncias reais, mas elas nem sempre são as mais convenientes; às vezes, será mais harmonioso expressá-las multiplicadas por uma constante. Por exemplo, as coordenadas dos vértices são $A = (h_A, 0, 0)$, $B = (0, h_B, 0)$ e $C = (0, 0, h_C)$, onde h_A é a altura relativa ao vértice A , h_B ao vértice B e h_C ao vértice C , mas poderiam ser expressas como $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Para todos os pontos de destaque do triângulo que veremos neste capítulo, vamos considerar um triângulo ABC qualquer com os elementos usuais, ou seja, vértices A, B, C ; ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e lados $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$.

Todos os pontos desenvolvidos até agora neste livro podem ser escritos em coordenadas trilineares, assim, neste capítulo daremos as coordenadas trilineares dos pontos já mencionados no capítulo 5 e de alguns outros.

6.1 – Incentro

O incentro I de um triângulo ABC qualquer (§ 5.1) tem coordenadas trilineares $(1, 1, 1)$ ou (r, r, r) , onde r é o raio do círculo inscrito ao triângulo e este raio é definido como sendo

$$r = \frac{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2\sqrt{a+b+c}}$$

$$\text{De fato, } \text{área } \triangle IBC + \text{área } \triangle IAC + \text{área } \triangle IAB = \frac{\alpha \cdot a}{2} + \frac{\beta \cdot b}{2} + \frac{\gamma \cdot c}{2}$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c}{2},$$

Como no incentro $\alpha = \beta = \gamma = r$, temos que área $\Delta ABC = \frac{r(a+b+c)}{2}$, logo

$$(1) \quad r = \frac{2\text{área}\Delta ABC}{a+b+c}$$

Utilizando a fórmula de Herón da área de um triângulo em função dos lados (Proposição

1.1) a área $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde $s = \frac{a+b+c}{2}$

é o semiperímetro do ΔABC e substituindo essas fórmulas em (1) e efetuando cálculos algébricos obtemos

$$r = \frac{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2\sqrt{a+b+c}}$$

6.2 – Baricentro

O baricentro G de um triângulo ABC qualquer (§ 5.3) tem coordenadas

trilineares $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\text{sen}\hat{A}}, \frac{1}{\text{sen}\hat{B}}, \frac{1}{\text{sen}\hat{C}}\right)$.

De fato, os triângulos GBC , GAC e GAB (figura 5.3) tem todos a área igual a $\frac{\text{área}\Delta ABC}{3}$ e igualando essa expressão a área de cada triângulo

$$\frac{\text{área}\Delta ABC}{3} = \frac{a\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\text{área}\Delta ABC}{3a}$$

$$\frac{\text{área}\Delta ABC}{3} = \frac{b\beta}{2} \Rightarrow \beta = \frac{2\text{área}\Delta ABC}{3b}$$

$$\frac{\text{área}\Delta ABC}{3} = \frac{c\gamma}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{2\text{área}\Delta ABC}{3c}$$

Dessas três equações temos que $G = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$ a menos da constante de

multiplicação $\frac{2\text{área}\Delta ABC}{3}$. Para chegarmos à outra forma basta usar a lei dos senos

(Teorema 1.4) $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ com a constante de multiplicação $\frac{1}{2R}$

para obtê-la, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

6.3 – Circuncentro

O circuncentro O de um triângulo ABC qualquer (parágrafo 5.2), tem coordenadas trilineares $(\cos \hat{A}, \cos \hat{B}, \cos \hat{C})$ ou $(R \cos \hat{A}, R \cos \hat{B}, R \cos \hat{C})$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao ΔABC .

De fato, aplicando o teorema de Pitágoras a cada um dos triângulos AOC , AOB e COB temos as relações

$$R^2 = \alpha^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \alpha^2$$

$$R^2 = \beta^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \beta^2$$

$$R^2 = \gamma^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \gamma^2$$

Usando a lei dos senos $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$, a identidade trigonométrica $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$ para cada um dos ângulos e substituindo nas equações acima obtemos $\alpha = R \cos \hat{A}$, $\beta = R \cos \hat{B}$ e $\gamma = R \cos \hat{C}$. Agora para obtermos R em função dos lados do triângulo, vamos igualar a fórmula da área de um triângulo qualquer em função do raio do círculo circunscrito (Proposição 1.2) com a fórmula da área em função dos lados (Proposição 1.1)

$$\frac{a.b.c}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

efetuando os cálculos algébricos obtemos

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

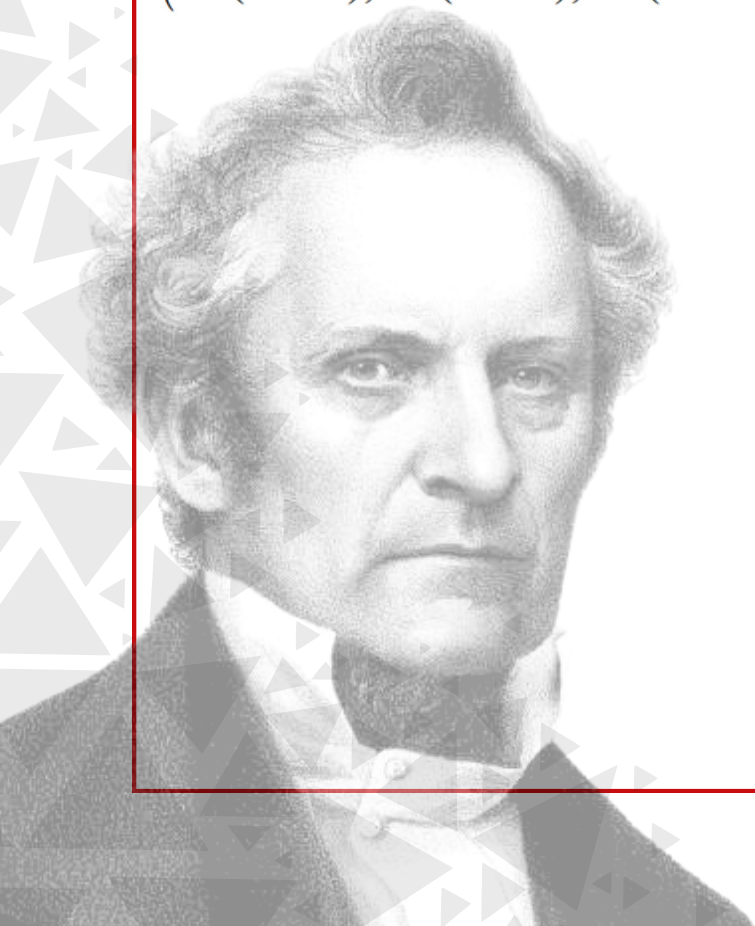
Com os exemplos anteriores exemplificamos o cálculo de coordenadas trilineares para pontos destacados do triângulo e a partir de agora apresenta-se as coordenadas trilineares omitindo os cálculos que demonstram cada coordenada. Vale destacar que todos podem ser demonstrados seguindo raciocínio análogo.

6.4 – Ortocentro

O ortocentro H de um triângulo qualquer (parágrafo 5.4) tem coordenadas trilineares $(\sec \hat{A}, \sec \hat{B}, \sec \hat{C})$.

6.5 – Centro do círculo de nove pontos

O centro do círculo de nove pontos (parágrafo 5.5) tem coordenadas trilineares $(\cos(\hat{B} - \hat{C}), \cos(\hat{C} - \hat{A}), \cos(\hat{A} - \hat{B}))$



Julius Plücker

6.6 – Ponto de Lemoine

Para compreender a definição do ponto de Lemoine é preciso antes saber o que é uma simediana.



Definição: A simétrica da mediana de um triângulo com respeito a bissetriz interna a partir de um mesmo vértice é chamada a simediana do triângulo.

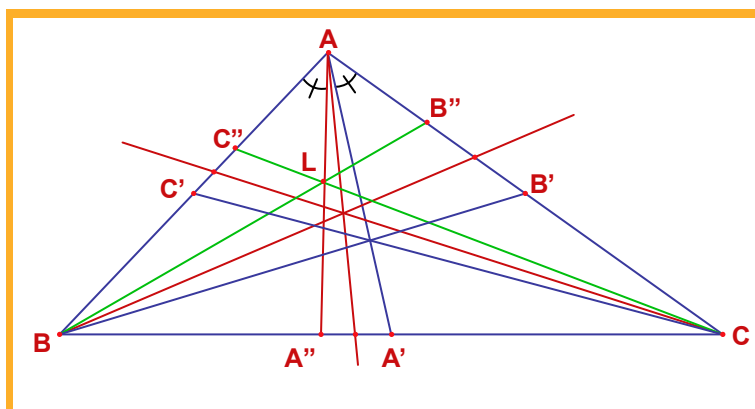
Um triângulo tem exatamente três simedianas (figura 6.1).

Agora sim podemos dar a definição do ponto de Lemoine e dar a suas coordenadas trilineares.



Definição: O ponto de interseção das três simedianas de um triângulo é chamado ponto *simediano* ou ponto de *Lemoine* do triângulo.

Figura 6.1 – Simedianas e o ponto de Lemoine



Fonte: Próprio autor, 2024

A mediana e a correspondente simediana do triângulo em relação a um vértice é também simétrico com respeito à bissetriz externa desse mesmo vértice.

As coordenadas trilineares do ponto de Lemoine é (a, b, c) .

Émile Michel Hyacinthe Lemoine

6.7 – Ponto de Gergonne

O ponto de Gergonne K de um triângulo qualquer (parágrafo 5.7) tem coordenadas trilineares $\left(\frac{1}{a(b+c-a)}, \frac{1}{b(c+a-b)}, \frac{1}{c(a+b-c)} \right)$ ou $\left(\frac{\sec^2 \hat{A}}{2}, \frac{\sec^2 \hat{B}}{2}, \frac{\sec^2 \hat{C}}{2} \right)$.

6.8 – Ponto de Nagel

O ponto de Nagel J de um triângulo qualquer (parágrafo 5.8) tem coordenadas trilineares $\left(\frac{b+c-a}{a}, \frac{c+a-b}{b}, \frac{a+b-c}{c} \right)$ ou $\left(\frac{\csc^2 \hat{A}}{2}, \frac{\csc^2 \hat{B}}{2}, \frac{\csc^2 \hat{C}}{2} \right)$.

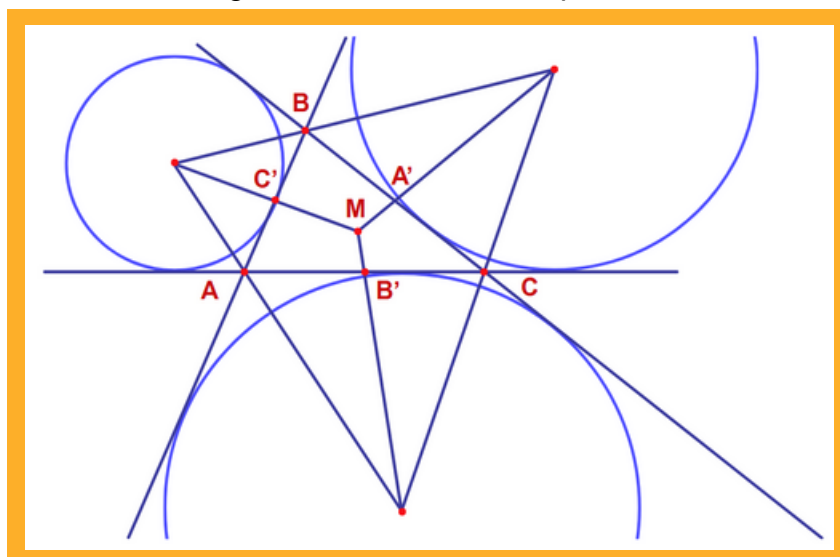
6.9 – Ponto Mittenpunkt



Definição: O ponto de concorrência das retas traçadas pelo centro do círculo tangente externo ao lado do triângulo com o correspondente ponto médio é chamado de ponto Mittenpunkt.

Mittenpunkt foi o nome dado por Nagel ao estudá-lo em 1836.

Figura 6.2 – Ponto Mittenpunkt



Fonte: Próprio autor, 2024

O ponto de Mittenpunkt M de um triângulo qualquer tem coordenadas trilineares

$$(b+c-a, c+a-b, a+b-c) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\cot \hat{A}}{2}, \frac{\cot \hat{B}}{2}, \frac{\cot \hat{C}}{2} \right).$$

6.10 – Ponto de Spieker



Definição: O incentro do triângulo médio de um triângulo qualquer dado é o ponto de Spieker.



Definição: O círculo inscrito no triângulo médio é chamado de círculo de Spieker.

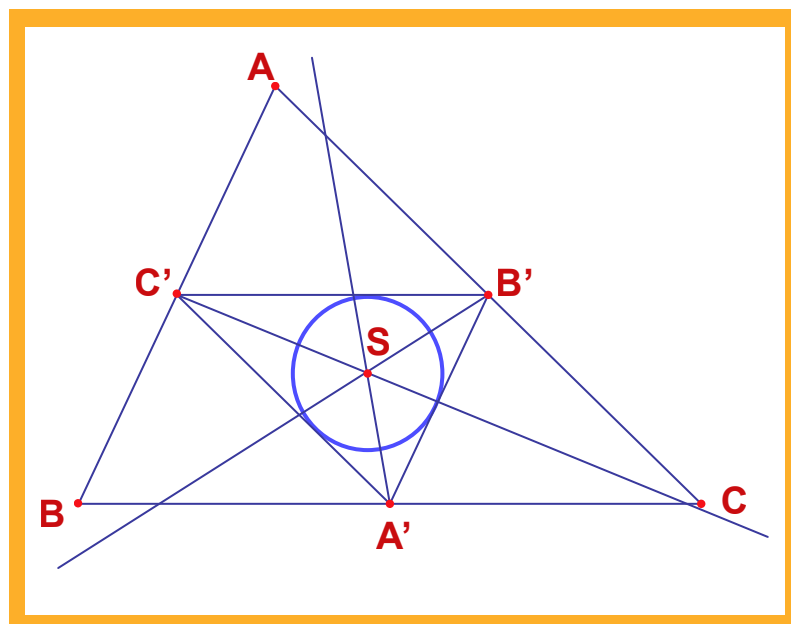
Foi o geômetra alemão do XIX, Theodor Spieker, que descobriu várias das propriedades do círculo de Spieker motivo pelo qual leva o seu nome.

O ponto de Spieker (figura 6.3) é o centro de gravidade do triângulo de referência.

O ponto de Spieker S de um triângulo qualquer tem coordenadas trilineares

$$\left(\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c} \right).$$

Figura 6.3 – Ponto de Spieker



Fonte: Próprio autor, 2024

6.11 – Ponto de Feuerbach

Como vimos no § 5.7, um triângulo tem quatro pontos de Feuerbach, mas considere aqui apenas o ponto de Feuerbach referente a tangência do círculo de nove pontos com o círculo inscrito ao triângulo dado. Assim, as coordenadas trilineares do ponto de Feuerbach é

$$\left(1 - \cos(\hat{B} - \hat{C}), 1 - \cos(\hat{C} - \hat{A}), 1 - \cos(\hat{A} - \hat{B}) \right)$$

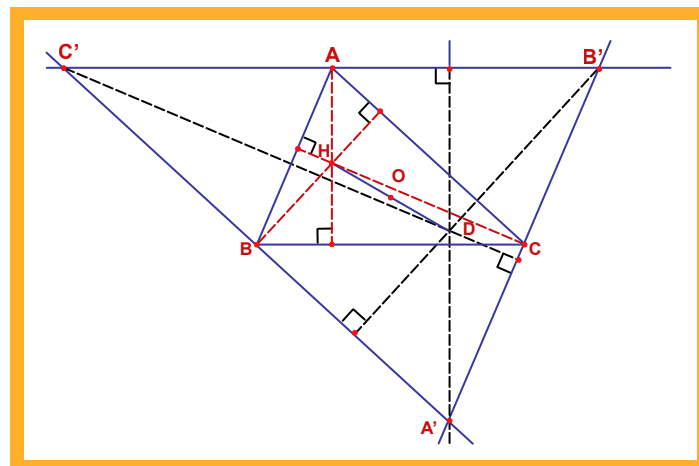
6.12 – Ponto De Longchamps

Definição: A reflexão do ortocentro de um triângulo qualquer sobre o circuncentro do mesmo é chamado de ponto De Longchamps.

O ponto De Longchamps é também o ortocentro do triângulo anticomplementar coordenadas trilineares de D são

$$\left(\cos \hat{A} - \cos \hat{B} \cos \hat{C}, \cos \hat{B} - \cos \hat{A} \cos \hat{C}, \cos \hat{C} - \cos \hat{A} \cos \hat{B} \right)$$

Figura 6.4 – Ponto de Longchamps



Fonte: Próprio autor, 2024

6.13 – Ponto de Schiffler

Definição: O ponto de concorrência das quatro retas de Euler (§5.5) dos triângulos IBC , ICA , IAB , ABC e é chamado de ponto de Schiffler.

O ponto de Schiffler F tem coordenadas trilineares.

$$\left(\frac{1}{\cos \hat{B} + \cos \hat{C}}, \frac{1}{\cos \hat{A} + \cos \hat{C}}, \frac{1}{\cos \hat{B} + \cos \hat{A}} \right).$$

Esses últimos resultados nos munem de motivação na busca para alcançar o limite dessa rica e abundante fonte de pesquisa que é o triângulo. O ensino das coordenadas trilineares no ensino médio desempenha um papel fundamental na introdução dos estudantes à geometria analítica avançada. Essas coordenadas oferecem uma maneira sistemática e precisa de descrever a localização de pontos dentro de um triângulo usando razões de segmentos relativos aos lados do triângulo. Elas permitem explorar propriedades geométricas de triângulos de forma mais abstrata e algébrica, enquanto reforçam conceitos básicos de proporção e geometria euclidiana. Além disso, o estudo das coordenadas trilineares permite abordagens mais avançadas em geometria analítica e para aplicações práticas em áreas como engenharia, física e ciências computacionais. E certamente não se encerra aí, pelo contrário, através do processo de aprendizagem das coordenadas trilineares é possível dar uma nova abordagem aos conteúdos já tão didaticamente massificados, possibilitando rever outros conceitos e fórmulas, além da atualização em um contexto olímpico matemático.

À medida que exploramos a ampla lista de elementos de destaque do triângulo, e os possíveis direcionamentos na busca de conhecimentos extracurriculares, acaba por plantar a curiosidade diante da geometria e abre novos horizontes de estudos do inesgotável triângulo.



REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1999.

COURT, Nathan Altshiller. **College Geometry**: An Introduction to the Modern Geometry of the triangle and the circle. New York: Dover Publications, Inc., 2007.

COXETER, Harold Scott MacDonald. **Introduction to Geometry**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.

DODGE, Clayton W.. **Euclidean Geometry and Transformations**. New York: Dover Publications, Inc., 1972.

KIMBERLING, Clark. "Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle", **Mathematics Magazine**, 67. Washington, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

MARTIN, George E.. **Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry**. New York: Springer-Verlag, 1994.

PEDOE, D.. **Circles**. Londres: Pergamon Press, 1957.

Tendo como abordagem principal explorar um pouco mais o inesgotável triângulo, numa apresentação de caráter elementar inicial, são mencionados, neste livro, elementos, classificações e propriedades do triângulo, de forma resumida, e mais de quinze pontos de destaque dessa figura geométrica, de uma forma transcendente. Porém, os resultados mostrados nesta obra destacam a existência de outros pontos e retas relacionados a um triângulo. Esses elementos começaram a ser descobertos a partir do século XIX e, aqui, descreve-se alguns dos vários pontos existentes que, na sua maioria, levam o nome de seus descobridores (Euler, Feuerbach, Gergonne, Nagel, Simson, Lemoine, entre outros). A lista é grande, mas os escolhidos foram os que poderiam ser, com um pouco de dedicação, trabalhados com tranquilidade em salas de aula do ensino médio. A grande contribuição deste trabalho está na oportunidade proporcionada a estudantes e professores descobrirem juntos um tema olímpico, “coordenadas trilineares”, o qual incentiva novas aprendizagens e novas formas de conexão entre a geometria e a álgebra. Trata-se de um sistema de coordenadas usado na geometria analítica. Utilizando a teoria dos triângulos, essas coordenadas fornecem uma maneira de descrever pontos no plano ou até mesmo no espaço em relação aos lados do triângulo e se vale de proporções de segmentos definidos pelos vértices do triângulo. Em suma, esta obra apresenta uma teoria que facilita a aplicação de técnicas algébricas para resolver problemas geométricos complexos, oferecendo uma abordagem eficiente e sistemática para investigar propriedades geométricas fundamentais e relações entre diferentes elementos dentro do contexto triangular.



MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

ISBN: 978-65-6074-045-7

CSL

